

# Matemáticas y juegos de cartas

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

IMATE - Unidad Juriquilla, UNAM

I3M - Université de Montpellier

24 de abril de 2015

# Blackjack

- ▶ Una mesa con varios jugadores y un repartidor

# Blackjack

- ▶ Una mesa con varios jugadores y un repartidor
- ▶ Cada jugador juega contra el repartidor
- ▶ Se comienza con 2 cartas y se puede ir pidiendo cartas de una en una
- ▶ El objetivo es llegar lo más cerca de 21 sin pasarse

# Blackjack

- ▶ Una mesa con varios jugadores y un repartidor
- ▶ Cada jugador juega contra el repartidor
- ▶ Se comienza con 2 cartas y se puede ir pidiendo cartas de una en una
- ▶ El objetivo es llegar lo más cerca de 21 sin pasarse
- ▶ Es el juego más jugado en los casinos del mundo

## 21: Blackjack



# Estrategia

| Player hand                          | Dealer's face-up card |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------------------------------------|-----------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                                      | 2                     | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | A  |
| <b>Hard totals (excluding pairs)</b> |                       |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 17-20                                | S                     | S  | S  | S  | S  | S  | S  | S  | S  | S  |
| 16                                   | S                     | S  | S  | S  | S  | H  | H  | SU | SU | SU |
| 15                                   | S                     | S  | S  | S  | S  | H  | H  | H  | SU | H  |
| 13-14                                | S                     | S  | S  | S  | S  | H  | H  | H  | H  | H  |
| 12                                   | H                     | H  | S  | S  | S  | H  | H  | H  | H  | H  |
| 11                                   | Dh                    | Dh | Dh | Dh | Dh | Dh | Dh | Dh | Dh | H  |
| 10                                   | Dh                    | Dh | Dh | Dh | Dh | Dh | Dh | Dh | H  | H  |
| 9                                    | H                     | Dh | Dh | Dh | Dh | H  | H  | H  | H  | H  |
| 5-8                                  | H                     | H  | H  | H  | H  | H  | H  | H  | H  | H  |
| <b>Soft totals</b>                   |                       |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|                                      | 2                     | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | A  |
| A,8-A,9                              | S                     | S  | S  | S  | S  | S  | S  | S  | S  | S  |
| A,7                                  | S                     | Ds | Ds | Ds | Ds | S  | S  | H  | H  | H  |
| A,6                                  | H                     | Dh | Dh | Dh | Dh | H  | H  | H  | H  | H  |
| A,4-A,5                              | H                     | H  | Dh | Dh | Dh | H  | H  | H  | H  | H  |
| A,2-A,3                              | H                     | H  | H  | Dh | Dh | H  | H  | H  | H  | H  |

# Más información

- ▶ Más información  $\rightarrow$  mejor algoritmo
- ▶ ¿Cómo obtener más información?

# Más información

- ▶ Más información → mejor algoritmo
- ▶ ¿Cómo obtener más información?
- ▶ Ver cartas de los otros jugadores



# Más información

- ▶ Más información → mejor algoritmo
- ▶ ¿Cómo obtener más información?
- ▶ Ver cartas de los otros jugadores
- ▶ Saber las cartas que han pasado

# Más información

- ▶ Más información → mejor algoritmo
- ▶ ¿Cómo obtener más información?
- ▶ Ver cartas de los otros jugadores
- ▶ Saber las cartas que han pasado
- ▶ ¿Qué tan bueno es el nuevo algoritmo?

# Póquer tradicional

- ▶ Baraja inglesa de 52 cartas
- ▶ Cada jugador recibe 5 cartas

# Póquer tradicional

- ▶ Baraja inglesa de 52 cartas
- ▶ Cada jugador recibe 5 cartas
- ▶ Hay una ronda de apuestas y de cambio de cartas

# Póquer tradicional

- ▶ Baraja inglesa de 52 cartas
- ▶ Cada jugador recibe 5 cartas
- ▶ Hay una ronda de apuestas y de cambio de cartas
- ▶ Hay una ronda final de apuestas.

# Póquer tradicional

- ▶ Baraja inglesa de 52 cartas
- ▶ Cada jugador recibe 5 cartas
- ▶ Hay una ronda de apuestas y de cambio de cartas
- ▶ Hay una ronda final de apuestas.
- ▶ La mejor mano gana. ¿Cómo ordenerlas?

# Póquer tradicional

- ▶ Baraja inglesa de 52 cartas
- ▶ Cada jugador recibe 5 cartas
- ▶ Hay una ronda de apuestas y de cambio de cartas
- ▶ Hay una ronda final de apuestas.
- ▶ La mejor mano gana. ¿Cómo ordenerlas?
  - ▶ Que sean manos bonitas/interesantes

# Póquer tradicional

- ▶ Baraja inglesa de 52 cartas
- ▶ Cada jugador recibe 5 cartas
- ▶ Hay una ronda de apuestas y de cambio de cartas
- ▶ Hay una ronda final de apuestas.
- ▶ La mejor mano gana. ¿Cómo ordenerlas?
  - ▶ Que sean manos bonitas/interesantes
  - ▶ Que entre estas, las menos frecuentes valgan más
  - ▶ Y de entre igual frecuencia, se ordenen por número



# Póquer tradicional

- ▶ Baraja inglesa de 52 cartas
- ▶ Cada jugador recibe 5 cartas
- ▶ Hay una ronda de apuestas y de cambio de cartas
- ▶ Hay una ronda final de apuestas.
- ▶ La mejor mano gana. ¿Cómo ordenerlas?
  - ▶ Que sean manos bonitas/interesantes
  - ▶ Que entre estas, las menos frecuentes valgan más
  - ▶ Y de entre igual frecuencia, se ordenen por número
  - ▶ Y a veces por palo

# Manos de póquer

## ♠ ♥ **POKER** ♦ ♣ HAND RANKINGS

---

|   |                   |
|---|-------------------|
|  Royal Flush     | 10♥ J♥ Q♥ K♥ A♥   |
|  Straight Flush  | 4♣ 5♣ 6♣ 7♣ 8♣    |
|  Four of a Kind  | K♠ K♥ K♣ K♦ 3♠    |
|  Full House      | 10♥ 10♠ 10♦ A♠ A♣ |
|  Flush           | 10♠ K♠ 2♠ 6♠ 7♠   |
|  Straight        | 7♣ 8♠ 9♦ 10♠ J♥   |
|  Three of a Kind | 5♠ 5♥ 5♣ J♦ A♦    |
|  Two Pair        | A♠ A♥ 3♣ 3♠ J♣    |
|  One Pair        | Q♦ Q♥ 2♥ 8♠ 9♣    |

---

# Conteo

- ▶ Matemáticas discretas
- ▶ Saber cuántos elementos han en un conjunto con ciertas propiedades

# Conteo

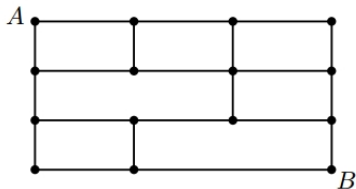
- ▶ Matemáticas discretas
- ▶ Saber cuántos elementos han en un conjunto con ciertas propiedades
- ▶ Varias técnicas de conteo
  - ▶ Enumerar
  - ▶ Regla de la suma y producto
  - ▶ Combinaciones, ordenaciones, permutaciones

# Conteo

- ▶ Matemáticas discretas
- ▶ Saber cuántos elementos han en un conjunto con ciertas propiedades
- ▶ Varias técnicas de conteo
  - ▶ Enumerar
  - ▶ Regla de la suma y producto
  - ▶ Combinaciones, ordenaciones, permutaciones
  - ▶ Divide y conquista
  - ▶ Contar por recursión
  - ▶ Funciones generadoras
  - ▶ Contar el complemento
  - ▶ Principio de inclusión exclusión

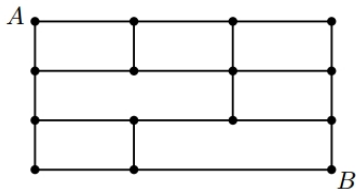
## Problemas ejemplo

- ¿Cuántos rectángulos y cuántos caminos?



## Problemas ejemplo

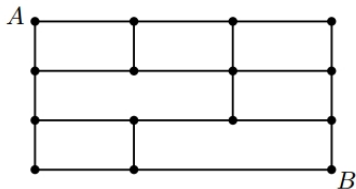
- ▶ ¿Cuántos rectángulos y cuántos caminos?



- ▶ En una pizzería hay 10 ingrediente. Las pizzas pequeñas llevan 3 ingredientes distintos. Las medianas 5 ingredientes distintos. Las grandes 7 ingredientes distintos. ¿De cuántas formas se pueden pedir 2 pizzas?

## Problemas ejemplo

- ▶ ¿Cuántos rectángulos y cuántos caminos?



- ▶ En una pizzería hay 10 ingrediente. Las pizzas pequeñas llevan 3 ingredientes distintos. Las medianas 5 ingredientes distintos. Las grandes 7 ingredientes distintos. ¿De cuántas formas se pueden pedir 2 pizzas?
- ▶ ¿Cuántos números hay de 10 dígitos que sean 1 o 2, pero que no tengan dos 1 consecutivos?



# Probabilidad

- ▶ ¿Cómo medir qué tan frecuente es algo?

# Probabilidad

- ▶ ¿Cómo medir qué tan frecuente es algo?

$$\frac{\text{Veces entre las que sucede}}{\text{Veces que intentamos}}$$

# Probabilidad

- ▶ ¿Cómo medir qué tan frecuente es algo?

$$\frac{\text{Veces entre las que sucede}}{\text{Veces que intentamos}}$$

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$$

# Probabilidad

- ▶ ¿Cómo medir qué tan frecuente es algo?

$$\frac{\text{Veces entre las que sucede}}{\text{Veces que intentamos}}$$

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$$

- ▶ Algunos ejemplos de volados y manos de póquer.

# Manos de póquer

♠ ♥ **POKER** ♦ ♣  
**HAND RANKINGS**

---

|  |                   |
|--|-------------------|
|  <b>Royal Flush</b>     | 10♥ J♥ Q♥ K♥ A♥   |
| <b>Straight Flush</b>   | 4♣ 5♣ 6♣ 7♣ 8♣    |
|  <b>Four of a Kind</b>  | K♠ K♥ K♣ K♦ 3♠    |
| <b>Full House</b>       | 10♥ 10♠ 10♦ A♠ A♣ |
|  <b>Flush</b>           | 10♠ K♠ 2♠ 6♠ 7♠   |
|  <b>Straight</b>        | 7♣ 8♠ 9♦ 10♠ J♥   |
| <b>Three of a Kind</b>  | 5♠ 5♥ 5♣ J♦ A♦    |
| <b>Two Pair</b>         | A♠ A♥ 3♣ 3♠ J♣    |
| <b>One Pair</b>         | Q♦ Q♥ 2♥ 8♠ 9♣    |

---

## ¿Cuántas veces barajar?

- ▶ Si se revuelve pocas veces, las cartas no quedan bien revueltas.
- ▶ Trucos de magia (Martin Gardner) aprovechan esto.

## ¿Cuántas veces barajar?

- ▶ Si se revuelve pocas veces, las cartas no quedan bien revueltas.
- ▶ Trucos de magia (Martin Gardner) aprovechan esto.
- ▶ Si se revuelve varias veces, pero muy ordenadamente, tampoco quedan bien revueltas.

## ¿Cuántas veces barajar?

- ▶ Si se revuelve pocas veces, las cartas no quedan bien revueltas.
- ▶ Trucos de magia (Martin Gardner) aprovechan esto.
- ▶ Si se revuelve varias veces, pero muy ordenadamente, tampoco quedan bien revueltas.
- ▶ Al barajar perfectamente 8 veces se regresa a la posición original.



## ¿Cuántas veces barajar?

- ▶ Si se revuelve pocas veces, las cartas no quedan bien revueltas.
- ▶ Trucos de magia (Martin Gardner) aprovechan esto.
- ▶ Si se revuelve varias veces, pero muy ordenadamente, tampoco quedan bien revueltas.
- ▶ Al barajar perfectamente 8 veces se regresa a la posición original.
- ▶ ¿Cómo modelar un buen barajeo matemáticamente? ¿Cuántas veces hay que barajar?

# Magos matemáticos

- ▶ Forma “carta de arriba”: Tomar la de hasta arriba y ponerla en un lugar aleatorio.
- ▶ Para  $n$  cartas, se requieren  $n \log n$  barajeos.

# Magos matemáticos

- ▶ Forma “carta de arriba”: Tomar la de hasta arriba y ponerla en un lugar aleatorio.
- ▶ Para  $n$  cartas, se requieren  $n \log n$  barajeos.
- ▶ Forma tradicional: Partir a la mitad aproximadamente e intentar intercalar.

# Magos matemáticos

- ▶ Forma “carta de arriba”: Tomar la de hasta arriba y ponerla en un lugar aleatorio.
- ▶ Para  $n$  cartas, se requieren  $n \log n$  barajeos.
- ▶ Forma tradicional: Partir a la mitad aproximadamente e intentar intercalar.
- ▶ (1986, Aldous, Diaconis) Se requieren 7 barajeos

# Magos matemáticos

- ▶ Forma “carta de arriba”: Tomar la de hasta arriba y ponerla en un lugar aleatorio.
- ▶ Para  $n$  cartas, se requieren  $n \log n$  barajeos.
- ▶ Forma tradicional: Partir a la mitad aproximadamente e intentar intercalar.
- ▶ (1986, Aldous, Diaconis) Se requieren 7 barajeos
- ▶ Hablar un poco de las técnicas.

# Distintos barajeos

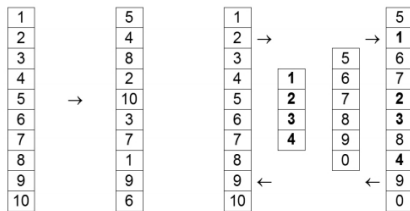


Figura 1: Ejemplo de posibles barajeos con  $U$  (izquierda),  $Trad$  y  $Trad^{-1}$  (derecha).

## Como decrece la distancia

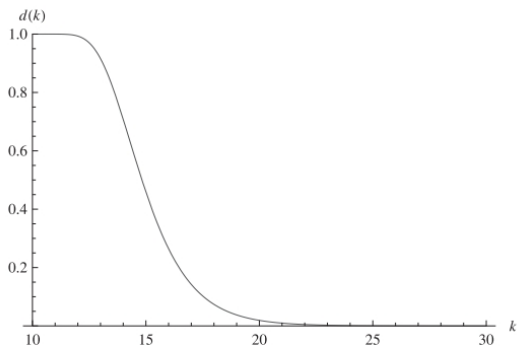


Figura 2:  $d(k)$  decrece exponencialmente conforme  $k$  crece.

# Texas Hold'em

- ▶ Baraja inglesa, todos contra todos.
- ▶ Se reparten 2 cartas a cada jugador. Ronda de apuestas.



# Texas Hold'em

- ▶ Baraja inglesa, todos contra todos.
- ▶ Se reparten 2 cartas a cada jugador. Ronda de apuestas.
- ▶ Se abren 3 cartas públicas
- ▶ Se intercalan rondas de apuestas y de agregar cartas públicas hasta que estas sean 5

# Computadoras vs. humanos

- ▶ Ajedrez
- ▶ Go

# Computadoras vs. humanos

- ▶ Ajedrez
- ▶ Go
- ▶ Texas Hold'em: (2015, Universidad de Alberta) Algoritmo que gana para todo fin práctico.

# Agradecimiento y contacto

## **Contacto**

leomtz@im.unam.mx

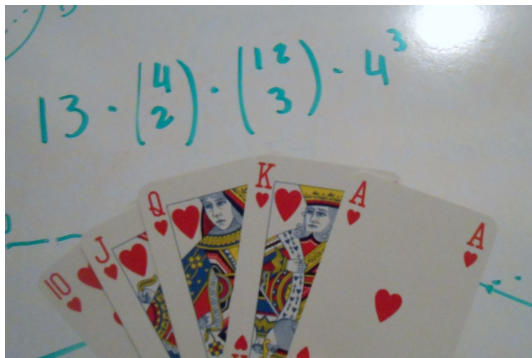
<http://blog.nekomath.com>

# Agradecimiento y contacto

## Contacto

leomtz@im.unam.mx

<http://blog.nekomath.com>



**¡Gracias por su atención!**