El diámetro de una gráfica que viene de caminos de colores

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Jorge Ramírez Alfonsín

Instituto de Matemáticas - Unidad Juriquilla, UNAM
I3M - Université Montpellier 2

29 de octubre de 2014

Gráficas

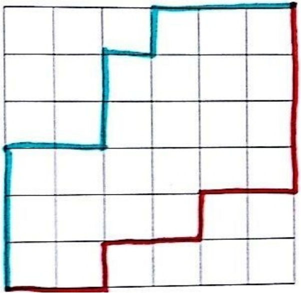
- Vértices y aristas
- Subgráficas
- Diámetro
- ¿Diámetros de subgráficas?

Gráfica de caminos

- Tomamos n entero positivo, un tablero de $n \times n$.
- Camino superior S y uno inferior I (no se cruzan).

Gráfica de caminos

- Tomamos n entero positivo, un tablero de $n \times n$.
- Camino superior S y uno inferior I (no se cruzan).

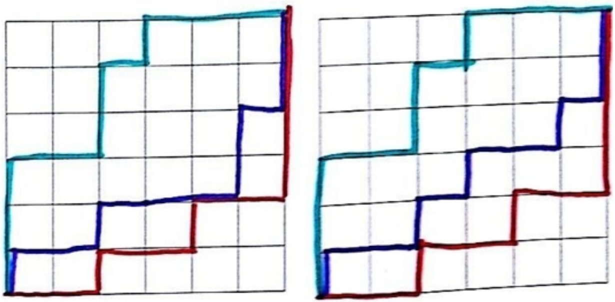


Gráfica de caminos

- **Vértices:** Caminos que quedan entre S e I
- **Aristas:** Caminos que varían en exactamente un renglón

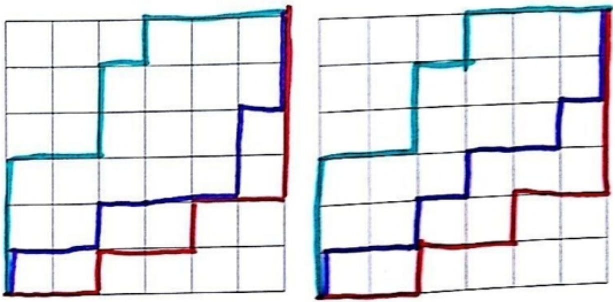
Gráfica de caminos

- **Vértices:** Caminos que quedan entre S e I
- **Aristas:** Caminos que varían en exactamente un renglón



Gráfica de caminos

- **Vértices:** Caminos que quedan entre S e I
- **Aristas:** Caminos que varían en exactamente un renglón



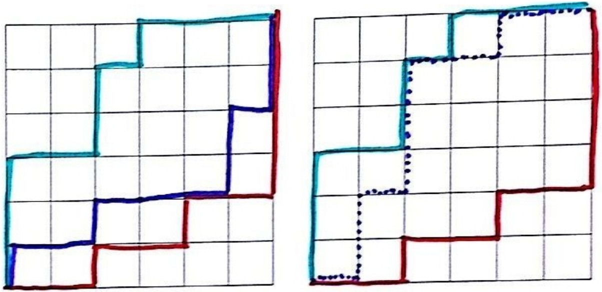
- ¿Cuál es el diámetro de esta gráfica?

Gráfica de caminos reflejables

- **Vértices:** Caminos que quedan entre S e I **y que su reflejado también quede entre** S e I
- **Aristas:** Caminos que varían en exactamente un renglón

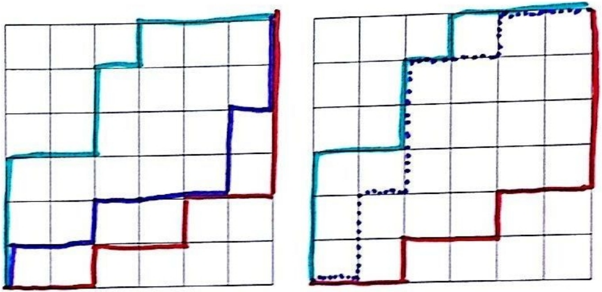
Gráfica de caminos reflejables

- **Vértices:** Caminos que quedan entre S e I **y que su reflejado también quede entre** S e I
- **Aristas:** Caminos que varían en exactamente un renglón



Gráfica de caminos reflejables

- **Vértices:** Caminos que quedan entre S e I **y que su reflejado también quede entre** S e I
- **Aristas:** Caminos que varían en exactamente un renglón



- ¿Cuál es el diámetro de esta gráfica?

Matroides

Matroides

- Generalizan independencia

Matroides

- Generalizan independencia
- $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$. E un conjunto inicial, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ un conjunto de **bases** que satisfacen:
  - $\mathcal{B}$ es no vacío.
  - **(Intercambio)** Si $A, B \in \mathcal{B}$ y $a \in A \setminus B$, entonces existe $b \in B \setminus A$ tal que $A \setminus \{a\} \cup \{b\} \in \mathcal{B}$.

Matroides

- Generalizan independencia
- $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$. E un conjunto inicial, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ un conjunto de **bases** que satisfacen:
  - $\mathcal{B}$ es no vacío.
  - **(Intercambio)** Si $A, B \in \mathcal{B}$ y $a \in A \setminus B$, entonces existe $b \in B \setminus A$ tal que $A \setminus \{a\} \cup \{b\} \in \mathcal{B}$.
- **(Rango)** Se puede mostrar que $|A| = |B|$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{B}$.

Gráfica de bases

- $\mathcal{M}$ un matroide

Gráfica de bases

- $\mathcal{M}$ un matroide
- $V = \mathcal{B}$, ponemos arista entre A y B si $|A \setminus B| = 1$.
- $G(\mathcal{M})$

Gráfica de bases

- $\mathcal{M}$ un matroide
- $V = \mathcal{B}$, ponemos arista entre A y B si $|A \setminus B| = 1$.
- $G(\mathcal{M})$

Teorema

1. $G(\mathcal{M})$ *es conexa.*
2. $diam(G(\mathcal{M})) \leq ran(\mathcal{M})$.

Gráfica de bases y cobases

- $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ un matroide con $A \in \mathcal{B}$ tal que $E \setminus A \in \mathcal{B}$.
- $G(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ es la subgráfica inducida por las bases tales que su complemento también es base.

Gráfica de bases y cobases

- $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ un matroide con $A \in \mathcal{B}$ tal que $E \setminus A \in \mathcal{B}$.
- $G(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ es la subgráfica inducida por las bases tales que su complemento también es base.

Conjetura

1. *$G(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ es conexa.*
2. *Existen dos bases complementarias A, B con $d(A, B) = r$.*
3. *$diam(G(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)) = ran(\mathcal{M})$.*

Gráfica de bases y cobases

- $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ un matroide con $A \in \mathcal{B}$ tal que $E \setminus A \in \mathcal{B}$.
- $G(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ es la subgráfica inducida por las bases tales que su complemento también es base.

Conjetura

1. *$G(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ es conexa.*
2. *Existen dos bases complementarias A, B con $d(A, B) = r$.*
3. *$diam(G(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)) = ran(\mathcal{M})$.*

- Los matroides que satisfacen 2 se llaman *baseables*. Están relacionados una generalización de la integral de Feynman.

Estado de la conjetura

	(Co)gráfico	Lattice path	Transversales	Bloque
1	Farber	Farber	Farber	?
2	Kajitani	L.M	?	?
3	C.-M.	L.M	?	?

Idea de la demostración

- Los tableros con caminos definen un matroide (de **caminos latices**)
- ¿Cómo se leen las bases?

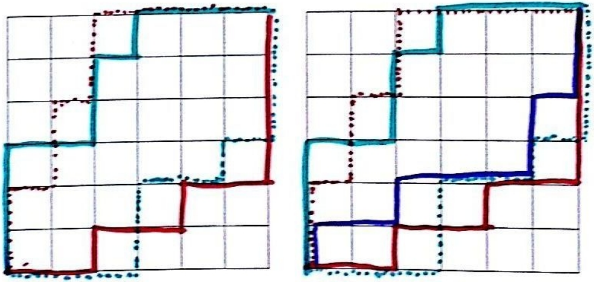
Idea de la demostración

- Los tableros con caminos definen un matroide (de **caminos latices**)
- ¿Cómo se leen las bases?
- Entonces las gráficas de caminos tienen diámetro a lo más $\mathrm{ran}(\mathcal{M}) = 2n$

Idea de la demostración

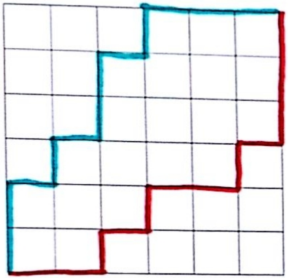
- ¿Qué quiere decir que haya un camino que tanto él como su reflejado queden entre S e I?

- ¿Qué quiere decir que haya un camino que tanto él como su reflejado queden entre S e I?



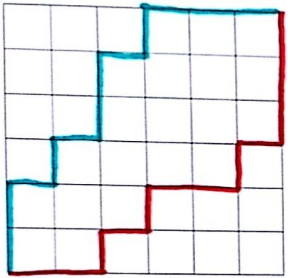
Idea de la demostración

- ¡Podemos pensar $G(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ como $G(\mathcal{M}')$ para otro matroide de caminos latices (el de los "mínimos" y "máximos")!



Idea de la demostración

- ¡Podemos pensar $G(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ como $G(\mathcal{M}')$ para otro matroide de caminos latices (el de los "mínimos" y "máximos")!



- De esta forma, el diámetro es $2n$.

$\square$

Preguntas

- ¿Hasta dónde se puede extender esta técnica de demostración?

Preguntas

- ¿Hasta dónde se puede extender esta técnica de demostración?
- ¿Se podrá usar para resolver la conjetura para matroides transversales de bloque?

Preguntas

- ¿Hasta dónde se puede extender esta técnica de demostración?
- ¿Se podrá usar para resolver la conjetura para matroides transversales de bloque?
- Los resultados en los matroides de caminos latices, ¿qué dicen exactamente para la integral de Feynman?

Agradecimiento y contacto

FB

Leonardo Martínez

Blog

http://blog.nekomath.com

Correo

leomtz@im.unam.mx

Agradecimiento y contacto

FB

Leonardo Martínez

Blog

http://blog.nekomath.com

Correo

leomtz@im.unam.mx

¡Gracias por su atención!