El Problema del Ángel de Conway y Gráficas Angelicales

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM

Examen Profesional
Jueves 24 de Noviembre de 2011

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Esquema

El juego

- Un problema acerca de un juego.
- Tablero infinito de ajedrez extendido a todas las direcciones.
- Dos jugadores: El Ángel y el Diablo.
- Juegan alternadamente.
- El Ángel intenta escapar.
  - Es como una pieza de ajedrez.
  - Tiene cierto poder k. Puede moverse a lo más a k movidas de rey de distancia.
- El Diablo intenta atraparlo.
  - Puede eliminar cualquier cuadrado del tablero.

El juego

- Un problema acerca de un juego.
- Tablero infinito de ajedrez extendido a todas las direcciones.
- Dos jugadores: El Ángel y el Diablo.
- Juegan alternadamente.
- El Ángel intenta escapar.
  - Es como una pieza de ajedrez.
  - Tiene cierto poder k. Puede moverse a lo más a k movidas de rey de distancia.
- El Diablo intenta atraparlo.
  - Puede eliminar cualquier cuadrado del tablero.

El juego

- Un problema acerca de un juego.
- Tablero infinito de ajedrez extendido a todas las direcciones.
- Dos jugadores: El Ángel y el Diablo.
- Juegan alternadamente.
- El Ángel intenta escapar.
  - Es como una pieza de ajedrez.
  - Tiene cierto poder k. Puede moverse a lo más a k movidas de rey de distancia.
- El Diablo intenta atraparlo.
  - Puede eliminar cualquier cuadrado del tablero.

Ejemplo para poder 3

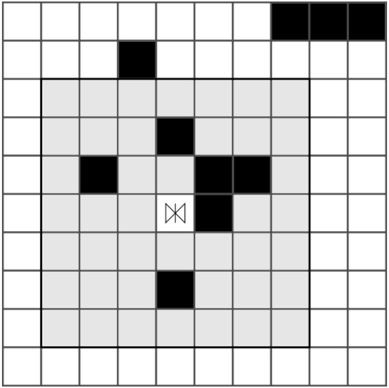

Figura: El Ángel por moverse a alguno de los cuadrados sombreados claro.

El Problema del Ángel de Conway

- Si $k = 1$, el Ángel es un Rey de Ajedrez.

Teorema

El Diablo puede atrapar a un rey de Ajedrez.

Problema

¿Existirá una pieza de ajedrez que pueda escapar del Diablo?

Problema

(John Conway, 1996) ¿Existirá una k para la cual el Ángel de poder k pueda escapar del Diablo?

El Problema del Ángel de Conway

- Si $k = 1$, el Ángel es un Rey de Ajedrez.

Teorema

El Diablo puede atrapar a un rey de Ajedrez.

Problema

¿Existirá una pieza de ajedrez que pueda escapar del Diablo?

Problema

(John Conway, 1996) ¿Existirá una k para la cual el Ángel de poder k pueda escapar del Diablo?

El Problema del Ángel de Conway

- Si $k = 1$, el Ángel es un Rey de Ajedrez.

Teorema

El Diablo puede atrapar a un rey de Ajedrez.

Problema

¿Existirá una pieza de ajedrez que pueda escapar del Diablo?

Problema

(John Conway, 1996) ¿Existirá una k para la cual el Ángel de poder k pueda escapar del Diablo?

El Problema del Ángel de Conway

- Si $k = 1$, el Ángel es un Rey de Ajedrez.

Teorema

El Diablo puede atrapar a un rey de Ajedrez.

Problema

¿Existirá una pieza de ajedrez que pueda escapar del Diablo?

Problema

(John Conway, 1996) ¿Existirá una k para la cual el Ángel de poder k pueda escapar del Diablo?

Esquema

El Diablo atrapa Ángeles limitados

- The Angel Problem, John Conway, 1996.
- Algunas estrategias obvias para el Ángel no funcionan.

Definición

- *Un Ángel es Tonto si promete siempre aumentar su coordenada en y.*
- *Un Ángel es Tonto flojo si promete nunca disminuir su coordenada en y.*
- *Un Ángel es Tonto relajado de laxitud r si no disminuye su coordenada en y más de r.*
- *Un Ángel es Tonto-hacia-afuera si siempre se aleja del origen.*

El Diablo atrapa Ángeles limitados

- The Angel Problem, John Conway, 1996.
- Algunas estrategias obvias para el Ángel no funcionan.

Definición

- *Un Ángel es Tonto si promete siempre aumentar su coordenada en y.*
- *Un Ángel es Tonto flojo si promete nunca disminuir su coordenada en y.*
- *Un Ángel es Tonto relajado de laxitud r si no disminuye su coordenada en y más de r.*
- *Un Ángel es Tonto-hacia-afuera si siempre se aleja del origen.*

Tres teoremas sorprendentes

Teorema

El Diablo puede atrapar a Ángeles tontos, tontos flojos, tontos relajados y tontos hacia afuera de cualquier poder y laxitud.

Teorema

El Diablo tiene una estrategia que forza al Ángel a regresar distancias arbitrarias hacia cualquier punto del plano.

Teorema

El Ángel no pierde nada si en cada turno sacrifica todos los cuadrados a los que pudo haber ido, pero decidió no hacerlo.

Tres teoremas sorprendentes

Teorema

El Diablo puede atrapar a Ángeles tontos, tontos flojos, tontos relajados y tontos hacia afuera de cualquier poder y laxitud.

Teorema

El Diablo tiene una estrategia que forza al Ángel a regresar distancias arbitrarias hacia cualquier punto del plano.

Teorema

El Ángel no pierde nada si en cada turno sacrifica todos los cuadrados a los que pudo haber ido, pero decidió no hacerlo.

Tres teoremas sorprendentes

Teorema

El Diablo puede atrapar a Ángeles tontos, tontos flojos, tontos relajados y tontos hacia afuera de cualquier poder y laxitud.

Teorema

El Diablo tiene una estrategia que forza al Ángel a regresar distancias arbitrarias hacia cualquier punto del plano.

Teorema

El Ángel no pierde nada si en cada turno sacrifica todos los cuadrados a los que pudo haber ido, pero decidió no hacerlo.

Conclusión de Conway

- **Conclusión** Una estrategia para que el Ángel escape es compleja.
- 100 dólares por una demostración de que el Ángel de algún poder escapa.
- 1000 dólares por una demostración de que el Diablo atrapa al Ángel de cualquier poder.

Conclusión de Conway

- **Conclusión** Una estrategia para que el Ángel escape es compleja.
- 100 dólares por una demostración de que el Ángel de algún poder escapa.
- 1000 dólares por una demostración de que el Diablo atrapa al Ángel de cualquier poder.

Esquema

El Juego del Rey apresurado

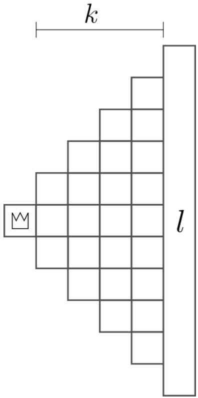

Figura: Tablero Rey Apresurado

- Linea *l* a la derecha a distancia *k*.
- El Rey siempre se mueve a la derecha.
- El Rey gana si llega a la línea *l*. El Diablo gana si evita esto

Resultado

Teorema

El Rey puede cruzar la línea si y sólo si $k < 5$.

Prueba Análisis de casos. Para $k \geq 5$, está basado en la siguiente figura.

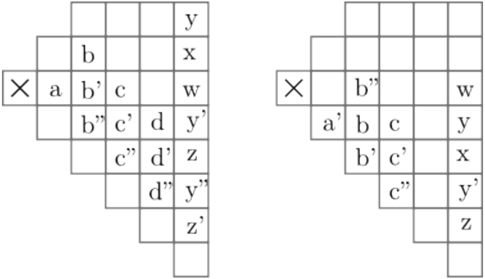

Figura: Estrategia para atrapar al Rey

Resultado

Teorema

El Rey puede cruzar la línea si y sólo si $k < 5$.

Prueba Análisis de casos. Para $k \geq 5$, está basado en la siguiente figura.

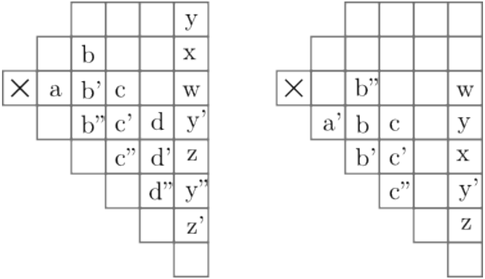

Figura: Estrategia para atrapar al Rey

Resultado

Para $k < 5$, está basado en la siguiente figura.

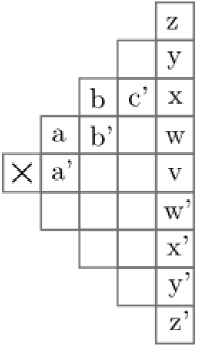

Figura: Estrategia para que escape el Rey

El Diablo contra el Rey

Teorema

El Diablo puede atrapar al rey de ajedrez.

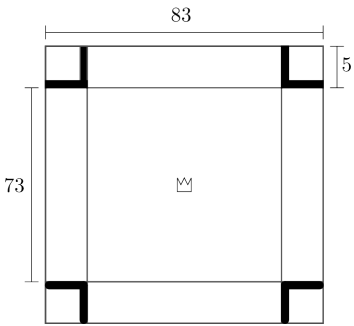

Figura: El Diablo prepara una caja para encerrar al Rey

Esquema

Generalizar los reyes

- Tesis doctoral, Martin Kutz, 2004
- ¿Reyes de poder α racional? ¿Real?
- Secuencias binarias de movimientos. Rey juega en 1 y Diablo en 0.
- Rey de poder $\frac{4}{3}$: $1111000111100011110000\ldots$

Definición

Se define la sucesión $\{u_n\}$ como $u_n = \lfloor (n+1)\gamma + \phi \rfloor - \lfloor n\gamma + \phi \rfloor$, en donde $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ y ϕ es una cierta constante de desfase.
El Rey de poder α es aquel que tiene una sucesión de movimientos según la sucesión u_n.

Generalizar los reyes

- Tesis doctoral, Martin Kutz, 2004
- ¿Reyes de poder α racional? ¿Real?
- Secuencias binarias de movimientos. Rey juega en 1 y Diablo en 0.
- Rey de poder $\frac{4}{3}$: $111100011110001111000\ldots$

Definición

Se define la sucesión $\{u_n\}$ como $u_n = \lfloor (n+1)\gamma + \phi \rfloor - \lfloor n\gamma + \phi \rfloor$, en donde $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ y ϕ es una cierta constante de desfase.
El Rey de poder α es aquel que tiene una sucesión de movimientos según la sucesión u_n.

Generalizar los reyes

- Tesis doctoral, Martin Kutz, 2004
- ¿Reyes de poder α racional? ¿Real?
- Secuencias binarias de movimientos. Rey juega en 1 y Diablo en 0.
- Rey de poder $\frac{4}{3}$: $111100011110001111000\ldots$

Definición

Se define la sucesión $\{u_n\}$ como $u_n = \lfloor (n+1)\gamma + \phi \rfloor - \lfloor n\gamma + \phi \rfloor$, en donde $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ y ϕ es una cierta constante de desfase.
El Rey de poder α es aquel que tiene una sucesión de movimientos según la sucesión u_n.

Resultados

- En efecto generaliza los poderes enteros.
- La constante de desfase no importa.
- Esta forma de jugar le da al Diablo "una buena distribución de turnos".

Teorema

El Diablo puede atrapar a cualquier Rey de poder $\alpha < 2$.

Prueba

- Generalizar prueba para el rey de ajedrez.
- Construir cercas de densidades adecuadas.

Resultados

- En efecto generaliza los poderes enteros.
- La constante de desfase no importa.
- Esta forma de jugar le da al Diablo "una buena distribución de turnos".

Teorema

El Diablo puede atrapar a cualquier Rey de poder $\alpha < 2$.

Prueba

- Generalizar prueba para el rey de ajedrez.
- Construir cercas de densidades adecuadas.

Resultados

- En efecto generaliza los poderes enteros.
- La constante de desfase no importa.
- Esta forma de jugar le da al Diablo “una buena distribución de turnos”.

Teorema

El Diablo puede atrapar a cualquier Rey de poder $\alpha < 2$.

Prueba

- Generalizar prueba para el rey de ajedrez.
- Construir cercas de densidades adecuadas.

Esquema

El Ángel en tres dimensiones

- The Angel and the Devil in three Dimensions, Imre Leader y Beia Bollobás, 2006.
- En tres dimensiones el Ángel tiene más espacio para moverse.
- El Ángel escapa con una “estrategia de informes”.
- Cada cubo tiene subcubos, cierto nivel de seguridad y cierto nivel de conectabilidad.

Teorema

El Ángel escapa en tres dimensiones para un poder suficientemente grande.

El Ángel en tres dimensiones

- The Angel and the Devil in three Dimensions, Imre Leader y Beia Bollobás, 2006.
- En tres dimensiones el Ángel tiene más espacio para moverse.
- El Ángel escapa con una “estrategia de informes”.
- Cada cubo tiene subcubos, cierto nivel de seguridad y cierto nivel de conectabilidad.

Teorema

El Ángel escapa en tres dimensiones para un poder suficientemente grande.

Esquema

Boom de soluciones

- Mathematical Puzzles, Peter Wrinkler, 2003.
- Cuatro soluciones independientes en 2006.
  - Peter Gacs. Estrategia de informes. Poder de Ángel no determinado.
  - Brian Bowditch. Juego de las cruces. Poder de Ángel 5.
  - András Máthé. Diablo Buena Onda. Poder de Ángel 11 y con modificaciones 2.
  - Oddvar Kloster. Paredes. Poder de Ángel 2.

Boom de soluciones

- Mathematical Puzzles, Peter Wrinkler, 2003.
- Cuatro soluciones independientes en 2006.
  - Peter Gacs. Estrategia de informes. Poder de Ángel no determinado.
  - Brian Bowditch. Juego de las cruces. Poder de Ángel 5.
  - András Máthé. Diablo Buena Onda. Poder de Ángel 11 y con modificaciones 2.
  - Oddvar Kloster. Paredes. Poder de Ángel 2.

Boom de soluciones

- Mathematical Puzzles, Peter Wrinkler, 2003.
- Cuatro soluciones independientes en 2006.
  - Peter Gacs. Estrategia de informes. Poder de Ángel no determinado.
  - Brian Bowditch. Juego de las cruces. Poder de Ángel 5.
  - András Máthé. Diablo Buena Onda. Poder de Ángel 11 y con modificaciones 2.
  - Oddvar Kloster. Paredes. Poder de Ángel 2.

Boom de soluciones

- Mathematical Puzzles, Peter Wrinkler, 2003.
- Cuatro soluciones independientes en 2006.
  - Peter Gacs. Estrategia de informes. Poder de Ángel no determinado.
  - Brian Bowditch. Juego de las cruces. Poder de Ángel 5.
  - András Máthé. Diablo Buena Onda. Poder de Ángel 11 y con modificaciones 2.
  - Oddvar Kloster. Paredes. Poder de Ángel 2.

Boom de soluciones

- Mathematical Puzzles, Peter Wrinkler, 2003.
- Cuatro soluciones independientes en 2006.
  - Peter Gacs. Estrategia de informes. Poder de Ángel no determinado.
  - Brian Bowditch. Juego de las cruces. Poder de Ángel 5.
  - András Máthé. Diablo Buena Onda. Poder de Ángel 11 y con modificaciones 2.
  - Oddvar Kloster. Paredes. Poder de Ángel 2.

Esquema

La idea de la prueba

- El Ángel declara el semiplano izquierdo como una zona prohibida.
- Siempre una “pared” separa la zona prohibida y la permitida. Hay una marca en la pared.
- En cada turno el Ángel:
  - Actualiza la pared segun cierta regla.
  - Mueve una marca sobre la pared dos unidades.
  - Se mueve a la casilla junto a la marca
- La esencia de la prueba consiste definir la regla de actualización y ver que funciona.

La idea de la prueba

- El Ángel declara el semiplano izquierdo como una zona prohibida.
- Siempre una “pared” separa la zona prohibida y la permitida. Hay una marca en la pared.
- En cada turno el Ángel:
  - Actualiza la pared segun cierta regla.
  - Mueve una marca sobre la pared dos unidades.
  - Se mueve a la casilla junto a la marca
- La esencia de la prueba consiste definir la regla de actualización y ver que funciona.

La idea de la prueba

- El Ángel declara el semiplano izquierdo como una zona prohibida.
- Siempre una "pared" separa la zona prohibida y la permitida. Hay una marca en la pared.
- En cada turno el Ángel:
  - Actualiza la pared segun cierta regla.
  - Mueve una marca sobre la pared dos unidades.
  - Se mueve a la casilla junto a la marca
- La esencia de la prueba consiste definir la regla de actualización y ver que funciona.

La idea de la prueba

- El Ángel declara el semiplano izquierdo como una zona prohibida.
- Siempre una "pared" separa la zona prohibida y la permitida. Hay una marca en la pared.
- En cada turno el Ángel:
    - Actualiza la pared segun cierta regla.
    - Mueve una marca sobre la pared dos unidades.
    - Se mueve a la casilla junto a la marca
- La esencia de la prueba consiste definir la regla de actualización y ver que funciona.

Posición inicial

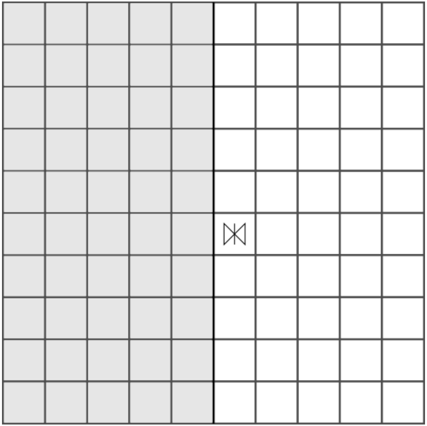

Figura: La posición inicial en la estrategia de Kloster.

Ejemplo

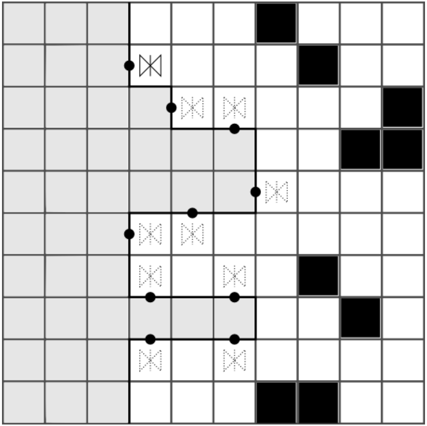

Figura: El Ángel moviendo la marca y moviéndose al cuadrado derecho.

La regla de actualización

- El Ángel intenta mantener la pared lo más corta posible.
- Puede aumentar la longitud en $2k$ si esto evade k cuadrados peligrosos.
- Siempre tiene que evadir la mayor cantidad de cuadrados peligrosos.

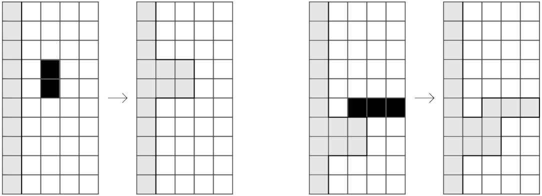

Figura: Algunas formas de acualizar la pared.

La prueba

- Tras actualizar, el cuadrado derecho no es peligroso.
- El cuadrado derecho podría estar evadido.
- Pero esto significaría que hay un ciclo.
- Este ciclo no puede estar en el futuro de la pared, ni en el pasado.
- Por lo tanto, encierra a la marca.
- Pero esto contradiría la regla de actualización.

La prueba

- Tras actualizar, el cuadrado derecho no es peligroso.
- El cuadrado derecho podría estar evadido.
- Pero esto significaría que hay un ciclo.
- Este ciclo no puede estar en el futuro de la pared, ni en el pasado.
- Por lo tanto, encierra a la marca.
- Pero esto contradiría la regla de actualización.

La prueba

- Tras actualizar, el cuadrado derecho no es peligroso.
- El cuadrado derecho podría estar evadido.
- Pero esto significaría que hay un ciclo.
- Este ciclo no puede estar en el futuro de la pared, ni en el pasado.
- Por lo tanto, encierra a la marca.
- Pero esto contradiría la regla de actualización.

La prueba

- Tras actualizar, el cuadrado derecho no es peligroso.
- El cuadrado derecho podría estar evadido.
- Pero esto significaría que hay un ciclo.
- Este ciclo no puede estar en el futuro de la pared, ni en el pasado.
- Por lo tanto, encierra a la marca.
- Pero esto contradiría la regla de actualización.

La prueba

- Tras actualizar, el cuadrado derecho no es peligroso.
- El cuadrado derecho podría estar evadido.
- Pero esto significaría que hay un ciclo.
- Este ciclo no puede estar en el futuro de la pared, ni en el pasado.
- Por lo tanto, encierra a la marca.
- Pero esto contradiría la regla de actualización.

La prueba

- Tras actualizar, el cuadrado derecho no es peligroso.
- El cuadrado derecho podría estar evadido.
- Pero esto significaría que hay un ciclo.
- Este ciclo no puede estar en el futuro de la pared, ni en el pasado.
- Por lo tanto, encierra a la marca.
- Pero esto contradiría la regla de actualización.

Ciclo imposible

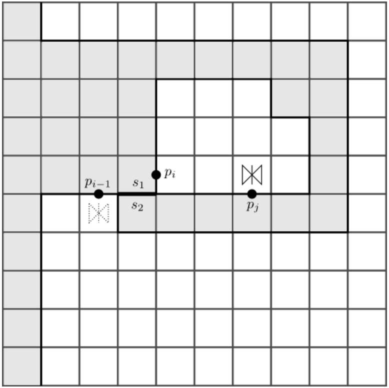

Figura: El Ángel queda encerrado en un ciclo de su estrategia.

El Teorema

Teorema

El Ángel de poder $k \geq 2$ escapa del Diablo en el Problema del Ángel de Conway

Esquema

El problema en una gráfica

- G una gráfica simple, con grados finitos. Tomamos $u \in G$.
- Estados: Parejas (H, v) con H subgráfica de G y $v \in H$.
- Ángel: Puede cambiar de (H, v) a (H, w) si v es adyacente a w en H.
- Diablo: Puede cambiar de (H, v) a $(H \setminus w, v)$ si $w \in H$ y $w \neq v$.
- El Diablo gana si deja (H, v) con v en una componente conexa finita de H.
- El Ángel gana si puede evitar esto.

Definición

Sea G una gráfica como arriba y $u \in G$. Diremos que la pareja (G, u) es angelical si el Ángel tiene una estrategia para ganar en el juego que comienza en (G, u).

El problema en una gráfica

- G una gráfica simple, con grados finitos. Tomamos $u \in G$.
- Estados: Parejas (H, v) con H subgráfica de G y $v \in H$.
- Ángel: Puede cambiar de (H, v) a (H, w) si v es adyacente a w en H.
- Diablo: Puede cambiar de (H, v) a $(H \setminus w, v)$ si $w \in H$ y $w \neq v$.
- El Diablo gana si deja (H, v) con v en una componente conexa finita de H.
- El Ángel gana si puede evitar esto.

Definición

Sea G una gráfica como arriba y $u \in G$. Diremos que la pareja (G, u) es angelical si el Ángel tiene una estrategia para ganar en el juego que comienza en (G, u).

El problema en una gráfica

- G una gráfica simple, con grados finitos. Tomamos $u \in G$.
- Estados: Parejas (H, v) con H subgráfica de G y $v \in H$.
- Ángel: Puede cambiar de (H, v) a (H, w) si v es adyacente a w en H.
- Diablo: Puede cambiar de (H, v) a $(H \setminus w, v)$ si $w \in H$ y $w \neq v$.
- El Diablo gana si deja (H, v) con v en una componente conexa finita de H.
- El Ángel gana si puede evitar esto.

Definición

Sea G una gráfica como arriba y $u \in G$. Diremos que la pareja (G, u) es angelical si el Ángel tiene una estrategia para ganar en el juego que comienza en (G, u).

El problema en una gráfica

- G una gráfica simple, con grados finitos. Tomamos $u \in G$.
- Estados: Parejas (H, v) con H subgráfica de G y $v \in H$.
- Ángel: Puede cambiar de (H, v) a (H, w) si v es adyacente a w en H.
- Diablo: Puede cambiar de (H, v) a $(H \setminus w, v)$ si $w \in H$ y $w \neq v$.
- El Diablo gana si deja (H, v) con v en una componente conexa finita de H.
- El Ángel gana si puede evitar esto.

Definición

Sea G una gráfica como arriba y $u \in G$. Diremos que la pareja (G, u) es angelical si el Ángel tiene una estrategia para ganar en el juego que comienza en (G, u).

Ejemplos

Proposición

El árbol binario infinito completo es angelical.

Prueba Siempre irse "hacia el otro lado".

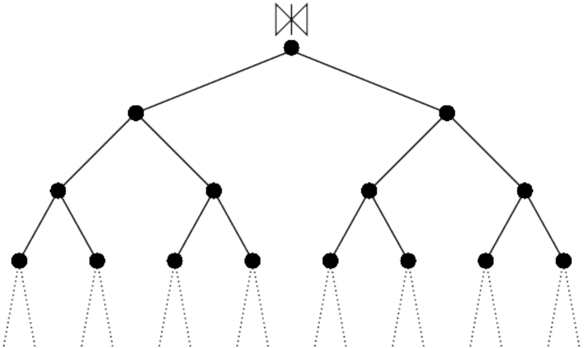

Figura: El árbol binario.

Ejemplos

Proposición

El árbol binario infinito completo es angelical.

Prueba Siempre irse “hacia el otro lado”.

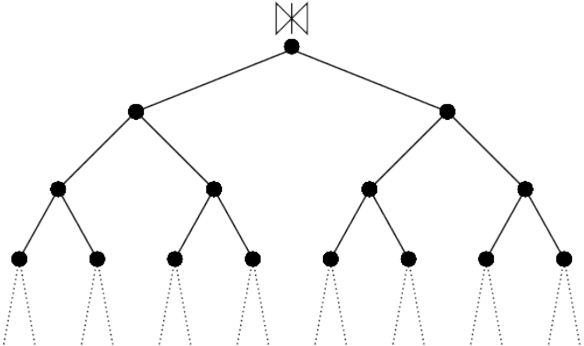

Figura: El árbol binario.

Ejemplos

Proposición

Sea k un entero positivo. Si G es la gráfica cuyos vértices son los enteros y en donde dos vértices i y j son adyacentes si y sólo si $|i - j| \leq k$ entonces G no es angelical.

Prueba Hacer trampas "muy lejos".

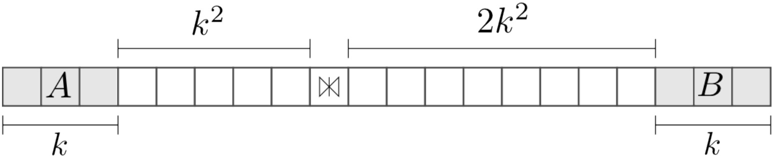

Figura: El Diablo prepara trampas laterales muy lejos.

Ejemplos

Proposición

Sea k un entero positivo. Si G es la gráfica cuyos vértices son los enteros y en donde dos vértices i y j son adyacentes si y sólo si $|i - j| \leq k$ entonces G no es angelical.

Prueba Hacer trampas "muy lejos".

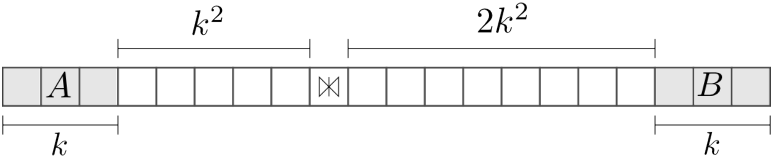

Figura: El Diablo prepara trampas laterales muy lejos.

Esquema

1. El Problema del Ángel de Conway
   - El Problema
   - Primeras dificultades para el Ángel
2. Variantes
   - El rey de ajedrez
   - Reyes de poder entre 1 y 2
   - El problema en 3D
3. Soluciones
   - Boom de soluciones
   - La prueba de Kloster
4. Gráficas angelicales
   - Definición
   - Formalización y teoremas de estrategias
   - Resultados varios

Formalizar el problema

- ¿Qué quiere decir "jugar por turnos"?

Definición

La digráfica del Probema del Ángel para la pareja inicial (G, u), a la cual denotaremos $\mathcal{D}_{(G,u)}$, es la digráfica que está definida como sigue:

- *Los vértices son las ternas (H, v, j) con H una subgráfica de G obtenida a partir de quitar una cantidad finita de vértices de G, v un vértice en H y $j \in \{A, D\}$.*
- *Las flechas son de alguno (y sólo de alguno) de los siguientes tipos:*
  - *De (H, v, A) a (H, w, D) si w es adyacente a v en H.*
  - *De (H, v, D) a $(H - w, v, A)$ si w es un vértice de H distinto de v.*

Formalizar el problema

- ¿Qué quiere decir “jugar por turnos”?

Definición

La digráfica del Probema del Ángel para la pareja inicial (G, u), a la cual denotaremos $\mathcal{D}_{(G,u)}$, es la digráfica que está definida como sigue:

- *Los vértices son las ternas (H, v, j) con H una subgráfica de G obtenida a partir de quitar una cantidad finita de vértices de G, v un vértice en H y $j \in \{A, D\}$.*
- *Las flechas son de alguno (y sólo de alguno) de los siguientes tipos:*
    - *De (H, v, A) a (H, w, D) si w es adyacente a v en H.*
    - *De (H, v, D) a $(H - w, v, A)$ si w es un vértice de H distinto de v.*

Digráfica de juego

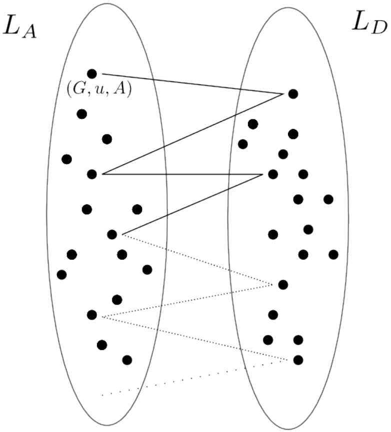

Figura: La digráfica de juego $\mathcal{D}_{(G,u)}$

Definiciones de estrategias

Hay que definir "estrategia"

Definición

(Estrategia ganadora para el Ángel)
Diremos que el Ángel tiene estrategia ganadora si existe un conjunto ganador $E_A \subseteq L_A$ y un conjunto respuesta $R_A \subseteq L_D$ que cumplen lo siguiente:

- $(G, u, A) \in E_A$.
- *Para cada elemento de E_A, existe una flecha hacia un elemento de R_A.*
- *Para cada elemento de R_A, todas las flechas son hacia elementos de E_A.*

Definiciones de estrategias

Hay que definir “estrategia”

Definición

(Estrategia ganadora para el Ángel)
Diremos que el Ángel tiene estrategia ganadora si existe un conjunto ganador $E_A \subseteq L_A$ y un conjunto respuesta $R_A \subseteq L_D$ que cumplen lo siguiente:

- $(G, u, A) \in E_A$.
- *Para cada elemento de E_A, existe una flecha hacia un elemento de R_A.*
- *Para cada elemento de R_A, todas las flechas son hacia elementos de E_A.*

Definiciones de estrategias

Definición

(Estrategia ganadora para el Diablo)
Diremos que el Diablo tiene estrategia ganadora si existe un conjunto ganador $E_D \subseteq L_D$ y un conjunto respuesta $R_D \subseteq L_A$ que cumplen lo siguiente: Llamaremos a un subconjunto E_D de L_D una estrategia ganadora para el Diablo si cumple las siguientes condiciones:

- $(G, u, A) \in R_D$.
- *Para cada elemento de E_D, existe una flecha hacia un elemento de R_D.*
- *Para cada elemento de R_D, todas las flechas son hacia elementos de E_D.*
- *Todas las trayectorias dirigidas en $E_D \cup R_D$ son finitas.*

Resultados

Teorema

Las definiciones formales que dimos de estrategias coinciden con la idea intuitiva que tenemos de estrategia para el juego

Teorema

(Incompatibilidad de estrategias) Para cualquier pareja (G, u) a lo más uno de los jugadores tiene estrategia ganadora.

Teorema

(Existencia de estrategias) Para cualquier pareja (G, u) al menos uno de los jugadores tiene estrategia ganadora.

Resultados

Teorema

Las definiciones formales que dimos de estrategias coinciden con la idea intuitiva que tenemos de estrategia para el juego

Teorema

(Incompatibilidad de estrategias) Para cualquier pareja (G, u) a lo más uno de los jugadores tiene estrategia ganadora.

Teorema

(Existencia de estrategias) Para cualquier pareja (G, u) al menos uno de los jugadores tiene estrategia ganadora.

Resultados

Teorema

Las definiciones formales que dimos de estrategias coinciden con la idea intuitiva que tenemos de estrategia para el juego

Teorema

(Incompatibilidad de estrategias) Para cualquier pareja (G, u) a lo más uno de los jugadores tiene estrategia ganadora.

Teorema

(Existencia de estrategias) Para cualquier pareja (G, u) al menos uno de los jugadores tiene estrategia ganadora.

Esquema

Resultados auxiliares

Proposición

(Supergráficas de angelicales son angelicales) Si (G, u) es una pareja angelical y G es subgráfica de K, entonces (K, u) también es una pareja angelical

Proposición

(El ángel puede regalar los vértices que abandona) Sea G una gráfica sin lazos con vértices de grado finito y u un vértice. Supongamos que el Ángel y el Diablo juegan como se ha propuesto sólo que ahora el Ángel cambia una pareja (H, v) a una pareja $(H - v, w)$ con w adyacente a v en H. Supongamos que el Diablo tiene una estrategia ganadora en este juego. Entonces, el Diablo tiene una estrategia ganadora para el juego original en (G, u).

Resultados auxiliares

Proposición

(Supergráficas de angelicales son angelicales) Si (G, u) es una pareja angelical y G es subgráfica de K, entonces (K, u) también es una pareja angelical

Proposición

(El ángel puede regalar los vértices que abandona) Sea G una gráfica sin lazos con vértices de grado finito y u un vértice. Supongamos que el Ángel y el Diablo juegan como se ha propuesto sólo que ahora el Ángel cambia una pareja (H, v) a una pareja $(H - v, w)$ con w adyacente a v en H. Supongamos que el Diablo tiene una estrategia ganadora en este juego. Entonces, el Diablo tiene una estrategia ganadora para el juego original en (G, u).

Resultados de vecindades

Proposición

Si en la pareja (G, u) se tiene para alguna r que $|S_r(u)| < r$, entonces la pareja (G, u) no es angelical.

Corolario

Si una pareja (G, u) es angelical, entonces $|\overline{B}_r(u)|$ crece al menos cuadráticamente con r.

Resultados de vecindades

Proposición

Si en la pareja (G, u) se tiene para alguna r que $|S_r(u)| < r$, entonces la pareja (G, u) no es angelical.

Corolario

Si una pareja (G, u) es angelical, entonces $|\overline{B}_r(u)|$ crece al menos cuadráticamente con r.

Resultados de vecindades

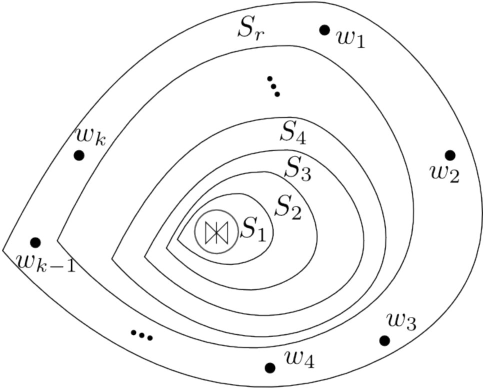

Figura: Las vecindades alrededor de la posición del Ángel

Ejemplos especiales

Proposición

Existe una gráfica G y uno de sus vértices u tal que $|\overline{B}_r(u)|$ crece exponencialmente con r, pero que (G, u) no es angelical.

Proposición

Existe una gráfica G y uno de sus vértices u tal que (G, u) es angelical, pero para $w \in G$ distinto de u se tiene que $(G \setminus w, u)$ no es angelical.

Ejemplos especiales

Proposición

Existe una gráfica G y uno de sus vértices u tal que $|\overline{B}_r(u)|$ *crece exponencialmente con* r*, pero que* (G, u) *no es angelical.*

Proposición

Existe una gráfica G y uno de sus vértices u tal que (G, u) *es angelical, pero para* $w \in G$ *distinto de u se tiene que* $(G \setminus w, u)$ *no es angelical.*

Ejemplos especiales

Proposición

Hay una gráfica G con un vértice $u \in G$ de grado infinito tal que para cada n el Ángel tiene estrategias para sobrevivir al menos n turnos comenzando en (G, u), pero tal que la pareja (G, u) no es angelical.

Ejemplos especiales

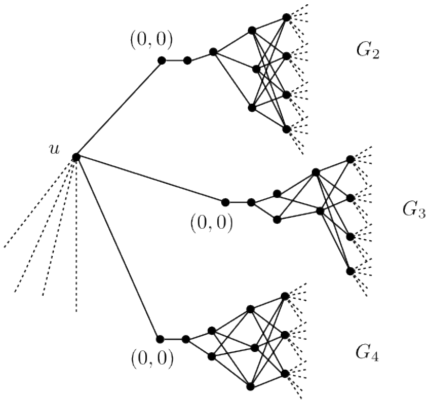

Figura: Una gráfica en la cual el Ángel puede sobrevivir cuanto quiera, pero no escapar.

La importancia de los grados finitos

- Incompatibilidad de estrategias.
- Existencia de estrategias.
- Garantizar que si el Diablo gana, puede ganar en una gráfica finita.

Teorema

Si G es una gráfica sin lazos, en donde cada vértice tiene grado finito, $u \in G$ y para cada n el Ángel tiene estrategias para sobrevivir al menos n turnos comenzando en (G, u), entonces la pareja (G, u) es angelical.

La importancia de los grados finitos

- Incompatibilidad de estrategias.
- Existencia de estrategias.
- Garantizar que si el Diablo gana, puede ganar en una gráfica finita.

Teorema

Si G es una gráfica sin lazos, en donde cada vértice tiene grado finito, $u \in G$ y para cada n el Ángel tiene estrategias para sobrevivir al menos n turnos comenzando en (G, u), entonces la pareja (G, u) es angelical.

Preguntas abiertas

- ¿Qué sucede si el Ángel y el Diablo juegan el el plano hiperbólico?
- ¿Habrá familias de gráficas fáciles de analizar? ¿Gráficas de Cayley?
- ¿Qué tipo de versiones contínuas del problema se pueden estudiar?

Conclusiones

- La historia del Problema del Ángel de Conway es una bonita historia de cómo se resuelven los problemas matemáticos.
- La generalización con gráficas es robusta y difícil de atacar.
- Aún quedan muchas direcciones en las cuales generalizar el problema y muchas páginas más para escribir en esta historia.

¡Gracias por su atención!

Conclusiones

- La historia del Problema del Ángel de Conway es una bonita historia de cómo se resuelven los problemas matemáticos.
- La generalización con gráficas es robusta y difícil de atacar.
- Aún quedan muchas direcciones en las cuales generalizar el problema y muchas páginas más para escribir en esta historia.

¡Gracias por su atención!

Conclusiones

- La historia del Problema del Ángel de Conway es una bonita historia de cómo se resuelven los problemas matemáticos.
- La generalización con gráficas es robusta y difícil de atacar.
- Aún quedan muchas direcciones en las cuales generalizar el problema y muchas páginas más para escribir en esta historia.

¡Gracias por su atención!

Conclusiones

- La historia del Problema del Ángel de Conway es una bonita historia de cómo se resuelven los problemas matemáticos.
- La generalización con gráficas es robusta y difícil de atacar.
- Aún quedan muchas direcciones en las cuales generalizar el problema y muchas páginas más para escribir en esta historia.

¡Gracias por su atención!