La conjetura de Merino-Welsh es cierta para matroides de caminos latices

Kolja Knauer
Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Jorge Ramírez Alfonsín

Instituto de Matemáticas - Unidad Juriquilla, UNAM
IMAG - Université Montpellier 2

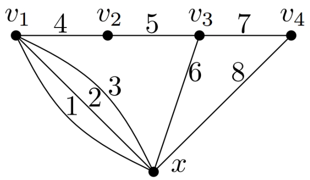
12 de noviembre de 2015
Coloquio Oaxaqueño

Algunas ideas en gráficas

Consideremos una gráfica G y etiquetemos sus aristas

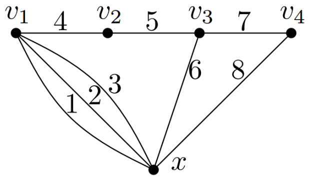
Algunas ideas en gráficas

Consideremos una gráfica G y etiquetemos sus aristas



Algunas ideas en gráficas

Consideremos una gráfica G y etiquetemos sus aristas



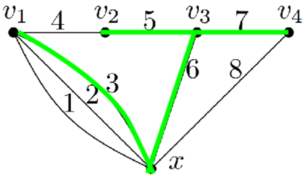
Nos interesan: los árboles generadores $\tau(G)$, las orientaciones acíclicas $\alpha(G)$ y las orientaciones totalmente cíclicas $\alpha^*(G)$.

Árboles generadores

Subgráficas conexas sin ciclos cuyas aristas cubren todos los vértices

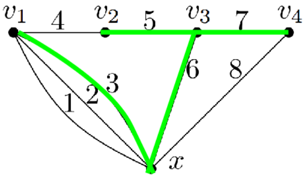
Árboles generadores

Subgráficas conexas sin ciclos cuyas aristas cubren todos los vértices



Árboles generadores

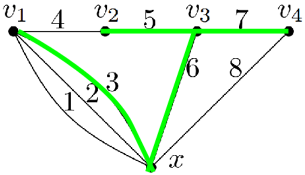
Subgráficas conexas sin ciclos cuyas aristas cubren todos los vértices



Se muestra el árbol generador $\{3, 5, 6, 7\}$. Otros ejemplos son $\{2, 5, 7, 8\}$ y $\{1, 4, 5, 8\}$.

Árboles generadores

Subgráficas conexas sin ciclos cuyas aristas cubren todos los vértices



Se muestra el árbol generador $\{3, 5, 6, 7\}$. Otros ejemplos son $\{2, 5, 7, 8\}$ y $\{1, 4, 5, 8\}$. Son 27 en total.

Árboles generadores

El conjunto de árboles generadores cumple

Árboles generadores

El conjunto de árboles generadores cumple

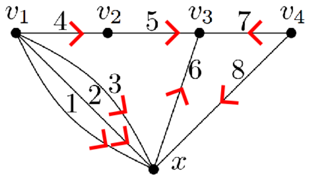
1. Ser no vacío
2. Si A y B son conjuntos de aristas de dos árboles generadores y hay un elemento $a \in A \setminus B$, entonces podemos encontrar un elemento $b \in B \setminus A$ tal que $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ es el conjunto de aristas de un árbol generador.

Orientaciones acíclicas

Dar una orientación a cada arista sin que aparezcan ciclos dirigidos

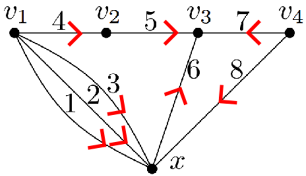
Orientaciones acíclicas

Dar una orientación a cada arista sin que aparezcan ciclos dirigidos



Orientaciones acíclicas

Dar una orientación a cada arista sin que aparezcan ciclos dirigidos



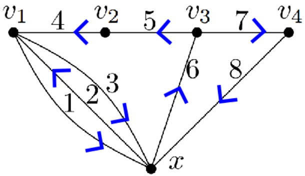
Son 42 en total.

Orientaciones totalmente cíclicas

Dar una orientación a cada arista de modo que cada arista esté en al menos un ciclo dirigido

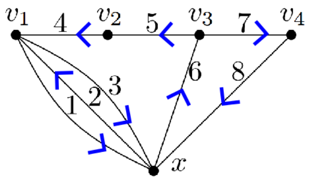
Orientaciones totalmente cíclicas

Dar una orientación a cada arista de modo que cada arista esté en al menos un ciclo dirigido



Orientaciones totalmente cíclicas

Dar una orientación a cada arista de modo que cada arista esté en al menos un ciclo dirigido



Son 42 en total.

Conjeturas de Merino-Welsh

Notemos que $\max\{42, 42\} \geq 27$.

Conjeturas de Merino-Welsh

Notemos que max$\{42, 42\} \geq 27$. En 1999, Criel Merino y Dominic Welsh se dan cuenta que $\alpha \geq \tau$ en ciertas familias de gráficas y en las que no, $\alpha' \geq \tau$. A partir de estas observaciones conjeturan:

Conjeturas de Merino-Welsh

Notemos que max$\{42, 42\} \geq 27$. En 1999, Criel Merino y Dominic Welsh se dan cuenta que $\alpha \geq \tau$ en ciertas familias de gráficas y en las que no, $\alpha' \geq \tau$. A partir de estas observaciones conjeturan:

Conjetura

Para cualquier gráfica G 2-conexa y sin bucles se cumple que:

$$\max(\alpha(G), \alpha^*(G)) \geq \tau(G)$$

Más adelante (2009), Conde y Welsh proponen versiones más fuertes, pero más manejables de la conjetura:

Conjeturas de Merino-Welsh

Más adelante (2009), Conde y Welsh proponen versiones más fuertes, pero más manejables de la conjetura:

Conjetura

Para cualquier gráfica G 2-conexa y sin bucles se cumple que:

1. *(Aditiva)* $\alpha(G) + \alpha^*(G) \geq 2 \cdot \tau(G)$.
2. *(Multiplicativa)* $\alpha(G) \cdot \alpha^*(G) \geq \tau(G)^2$.

Conjeturas de Merino-Welsh

Más adelante (2009), Conde y Welsh proponen versiones más fuertes, pero más manejables de la conjetura:

Conjetura

Para cualquier gráfica G 2-conexa y sin bucles se cumple que:

1. *(Aditiva)* $\alpha(G) + \alpha^*(G) \geq 2 \cdot \tau(G)$.
2. *(Multiplicativa)* $\alpha(G) \cdot \alpha^*(G) \geq \tau(G)^2$.

$$\max(\alpha, \alpha^*) \geq \frac{\alpha + \alpha^*}{2} \geq \sqrt{\alpha \cdot \alpha^*}.$$

Resultados parciales

- 1999 - Merino, Welsh - Se plantea la conjetura y algunas familias
- 2009 - Conde, Merino - Threshold graphs, bipartitas completas, $9,945,269$ ejemplos computacionalmente

Resultados parciales

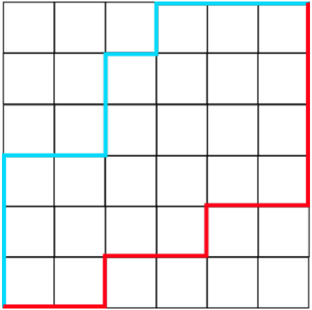
- 1999 - Merino, Welsh - Se plantea la conjetura y algunas familias
- 2009 - Conde, Merino - Threshold graphs, bipartitas completas, $9, 945, 269$ ejemplos computacionalmente
- 2010 - Thomassen - G con al menos $4n$ aristas o a lo más $\frac{16n}{15}$ aristas, multigráficas de grado máximo 3 y triangulaciones planas
- 2011 - Chávez-Lomelí, Merino, Noble, Ramírez-Ibáñez - Ruedas, whirls, 3-regulares de cuello al menos 5, completas
- 2014 - Noble, Royle - Series parallel graphs

Escaleras

- Tomamos m, n enteros positivos, un tablero de $m \times n$.
- Camino inferior P y uno superior Q (no se cruzan).

Escaleras

- Tomamos m, n enteros positivos, un tablero de $m \times n$.
- Camino inferior P y uno superior Q (no se cruzan).

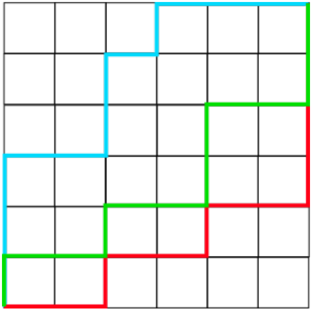


Caminos válidos

- Consideremos todos los caminos que quedan entre P y Q y suben o van a la derecha en cada paso.

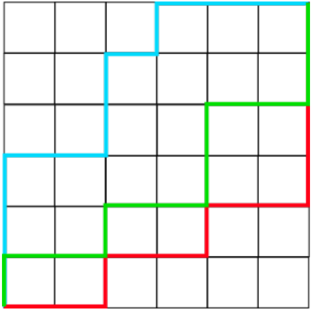
Caminos válidos

- Consideremos todos los caminos que quedan entre P y Q y suben o van a la derecha en cada paso.



Caminos válidos

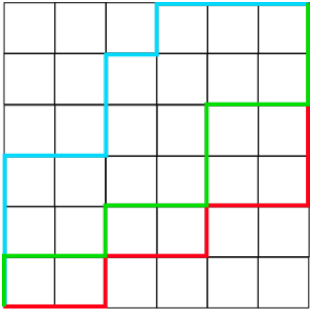
- Consideremos todos los caminos que quedan entre P y Q y suben o van a la derecha en cada paso.



Podemos identificarlos viendo en qué momentos se va hacia arriba.

Caminos válidos

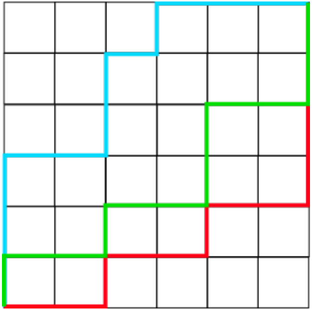
- Consideremos todos los caminos que quedan entre P y Q y suben o van a la derecha en cada paso.



Podemos identificarlos viendo en qué momentos se va hacia arriba. $\{1,4,7,8,11,12\}$.

Caminos válidos

- Consideremos todos los caminos que quedan entre P y Q y suben o van a la derecha en cada paso.



Podemos identificarlos viendo en qué momentos se va hacia arriba. $\{1,4,7,8,11,12\}$. Otro es $\{1,2,3,6,7,11\}$.

Caminos válidos

El conjunto de caminos válidos $\mathcal{B}$ cumple

Caminos válidos

El conjunto de caminos válidos $\mathcal{B}$ cumple

1. Ser no vacío
2. Si A y B están en $\mathcal{B}$ y hay un elemento $a \in A \setminus B$, entonces podemos encontrar un elemento $b \in B \setminus A$ tal que $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ está en $\mathcal{B}$.

Caminos válidos

El conjunto de caminos válidos $\mathcal{B}$ cumple

1. Ser no vacío
2. Si A y B están en $\mathcal{B}$ y hay un elemento $a \in A \setminus B$, entonces podemos encontrar un elemento $b \in B \setminus A$ tal que $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ está en $\mathcal{B}$.

Son las mismas propiedades que para los conjuntos de aristas de árboles generadores.

Matroides

Un *matroide* está formado por un conjunto inicial E y un conjunto de *bases* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$, de modo que $\mathcal{B}$ cumple 1. y 2.

Un *matroide* está formado por un conjunto inicial E y un conjunto de *bases* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$, de modo que $\mathcal{B}$ cumple 1. y 2.
Tenemos dos formas de construir matroides:

Matroides

Un *matroide* está formado por un conjunto inicial E y un conjunto de *bases* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$, de modo que $\mathcal{B}$ cumple 1. y 2.
Tenemos dos formas de construir matroides:

- A partir de una gráfica: matroides gráficos.

Matroides

Un *matroide* está formado por un conjunto inicial E y un conjunto de *bases* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$, de modo que $\mathcal{B}$ cumple 1. y 2.
Tenemos dos formas de construir matroides:

- A partir de una gráfica: matroides gráficos.
- A partir de un tablero: matroides de caminos latices (2013 - Bonin, de Mier, Noy).

Otra forma de construir matroides

- Tomamos un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$.

Otra forma de construir matroides

- Tomamos un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$.
- Tomamos un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$.

Otra forma de construir matroides

- Tomamos un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$.
- Tomamos un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$.
- Un subconjunto I de $[j]$ es base si $\{v_i : i \in I\}$ es base vectorial de $\text{span}(S)$.

Otra forma de construir matroides

- Tomamos un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$.
- Tomamos un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$.
- Un subconjunto I de $[j]$ es base si $\{v_i : i \in I\}$ es base vectorial de $\operatorname{span}(S)$.

En este caso, decimos que el matroide es *representable* sobre $\mathbb{F}$.

Otra forma de construir matroides

- Tomamos un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$.
- Tomamos un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$.
- Un subconjunto I de $[j]$ es base si $\{v_i : i \in I\}$ es base vectorial de span(S).

En este caso, decimos que el matroide es *representable* sobre $\mathbb{F}$. Si $\mathbb{F}$ es $GF(2)$, simplemente decimos que el matroide es *binario*.

Independientes

- A cualquier subconjunto de una base le llamaremos un conjunto *independiente*. Funciona para matroirdes en general.

Independientes

- A cualquier subconjunto de una base le llamaremos un conjunto *independiente*. Funciona para matroirdes en general.
- Para un subconjunto A del conjunto inicial definimos $r(A)$ como la cardinalidad del máximo independiente contenido en A.

Independientes

- A cualquier subconjunto de una base le llamaremos un conjunto *independiente*. Funciona para matroirdes en general.
- Para un subconjunto A del conjunto inicial definimos $r(A)$ como la cardinalidad del máximo independiente contenido en A.
- Una herramienta algebraica que guarda mucha información es el *polinomio de Tutte*, un polinomio en dos variables x y y definido como sigue:

Independientes

- A cualquier subconjunto de una base le llamaremos un conjunto *independiente*. Funciona para matroirdes en general.
- Para un subconjunto A del conjunto inicial definimos $r(A)$ como la cardinalidad del máximo independiente contenido en A.
- Una herramienta algebraica que guarda mucha información es el *polinomio de Tutte*, un polinomio en dos variables x y y definido como sigue:

$$T(M; x, y) = \sum_{A \subset E} (x-1)^{r(E)-r(A)}(y-1)^{|A|-r(A)}.$$

Polinomio de Tutte

En tableros, $T(M;1,1) =$ número de caminos válidos.

Polinomio de Tutte

En tableros, $T(M;1,1) =$ número de caminos válidos.
En gráficas:

- $T(M;1,1) =$ árboles generadores
- $T(M;2,0) =$ orientaciones acíclicas
- $T(M;0,2) =$ orientaciones totalmente cíclicas

Polinomio de Tutte

En tableros, $T(M; 1, 1) =$ número de caminos válidos.
En gráficas:

- $T(M; 1, 1) =$ árboles generadores
- $T(M; 2, 0) =$ orientaciones acíclicas
- $T(M; 0, 2) =$ orientaciones totalmente cíclicas

El polinomio de Tutte se puede obtener recursivamente

Conjeturas de Merino-Welsh

Conjetura (Conjeturas de Merino-Welsh para matroides)

Sea M un matroide sin bucles ni cobucles y T_M su polinomio de Tutte. Entonces:

1. $\max(T_M(2,0), T_M(0,2)) \geq T_M(1,1)$.
2. *(Aditiva)* $T_M(2,0) + T_M(0,2) \geq 2 \cdot T_M(1,1)$.
3. *(Multiplicativa)* $T_M(2,0) \cdot T_M(0,2) \geq T_M(1,1)^2$.

Resultados parciales

- 2011 - Chávez-Lomelí, Merino, Noble, Ramírez-Ibáñez - Matroides de catalan y paving matroids

Resultados parciales

- 2011 - Chávez-Lomelí, Merino, Noble, Ramírez-Ibáñez - Matroides de catalan y paving matroids
- 2015 - Knauer, M-S, Ramírez-Alfonsín - Matroides de caminos latices

Resultados parciales

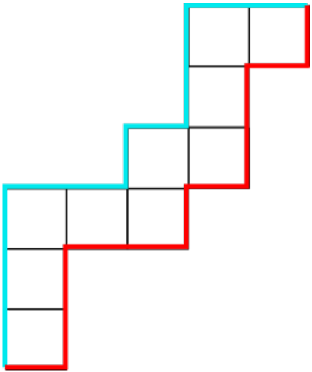
- 2011 - Chávez-Lomelí, Merino, Noble, Ramírez-Ibáñez - Matroides de catalan y paving matroids
- 2015 - Knauer, M-S, Ramírez-Alfonsín - Matroides de caminos latices + mejora multiplicativa y carateterización de igualdad (arXiv y enviado)

Serpientes

Si P y Q encierran una banda de ancho 1, decimos que tenemos una *serpiente*.

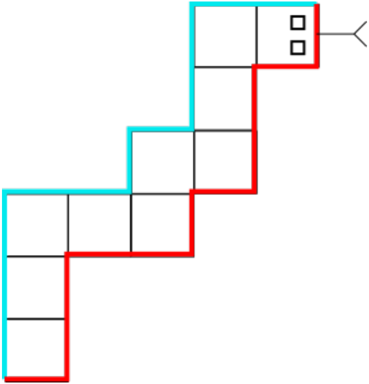
Serpientes

Si P y Q encierran una banda de ancho 1, decimos que tenemos una *serpiente*.



Serpientes

Si P y Q encierran una banda de ancho 1, decimos que tenemos una *serpiente*.

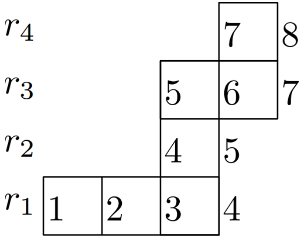


Ejemplo de caminos en serpientes

Consideremos la siguiente serpiente:

Ejemplo de caminos en serpientes

Consideremos la siguiente serpiente:



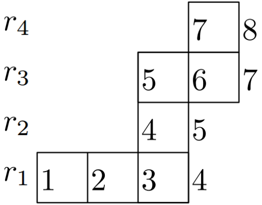
Un camino válido es $\{3, 5, 6, 7\}$. Otros son $\{2, 5, 7, 8\}$ y $\{1, 4, 5, 8\}$

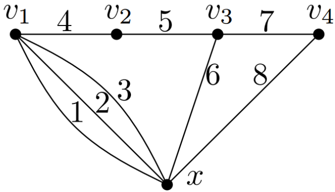
Correspondencia

De hecho, existe una correspondencia entre caminos de la serpiente y árboles generadores de una gráfica.

Correspondencia

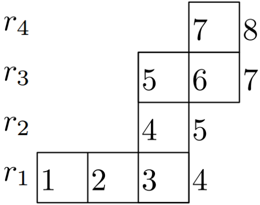
De hecho, existe una correspondencia entre caminos de la serpiente y árboles generadores de una gráfica.

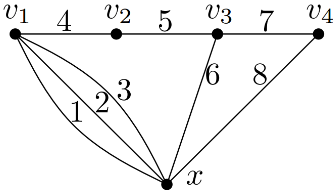




Correspondencia

De hecho, existe una correspondencia entre caminos de la serpiente y árboles generadores de una gráfica.

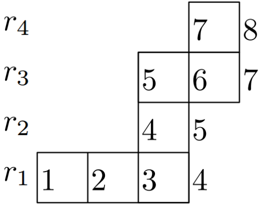


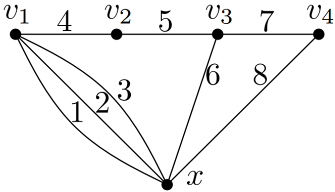


Cuando existe una gráfica correspondiente al tablero, decimos que el matroide obtenido es *gráfico*.

Correspondencia

De hecho, existe una correspondencia entre caminos de la serpiente y árboles generadores de una gráfica.

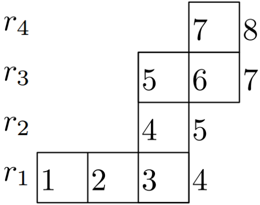


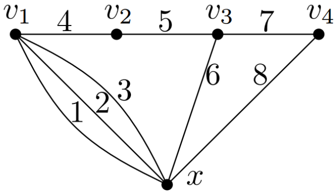


Cuando existe una gráfica correspondiente al tablero, decimos que el matroide obtenido es *gráfico*. No todos los tableros dan matroides gráficos.

Correspondencia

De hecho, existe una correspondencia entre caminos de la serpiente y árboles generadores de una gráfica.





Cuando existe una gráfica correspondiente al tablero, decimos que el matroide obtenido es *gráfico*. No todos los tableros dan matroides gráficos. ¿Cuáles lo hacen?

Resultados

Teorema (Caracterización de serpientes)

Dado un tablero, son equivalentes:

- *Que el tablero sea una serpiente*
- *Que el matroide obtenido sea gráfico*
- *Que el matroide obtenido sea binario*

Resultados

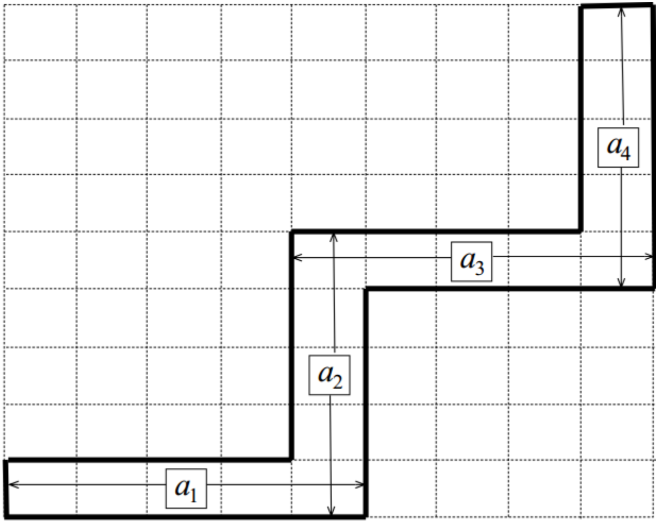
Teorema (Caracterización de serpientes)

Dado un tablero, son equivalentes:

- *Que el tablero sea una serpiente*
- *Que el matroide obtenido sea gráfico*
- *Que el matroide obtenido sea binario*

De hecho las serpientes siempre son *abanicos generalizados*.

Resultados



Resultados

Sea $F(n)$ el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos $b = (b_1, \ldots, b_n)$ de longitud n sin unos consecutivos.

Resultados

Sea $F(n)$ el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos $b = (b_1, \ldots, b_n)$ de longitud n sin unos consecutivos.

Proposición

La cantidad de caminos en la serpiente $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es

$$\sum_{b \in F(n+1)} \prod_{i=1}^{n} (a_i - 1)^{1-|b_{i+1}-b_i|}.$$

Resultados

Sea $F(n)$ el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos $b = (b_1, \ldots, b_n)$ de longitud n sin unos consecutivos.

Proposición

La cantidad de caminos en la serpiente $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *es*

$$\sum_{b \in F(n+1)} \prod_{i=1}^{n} (a_i - 1)^{1-|b_{i+1}-b_i|}.$$

Proposición

El producto $\alpha \cdot \alpha^*$ *para la serpiente* $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *es*

$$4 \cdot \prod_{i=1}^{n} (2^{a_i} - 1).$$

Resultados

Teorema

Sea M un matroide de caminos latices sin bucles ni cobucles que no sea una suma directa de serpientes triviales. Entonces

$$T_M(2,0) \cdot T_M(0,2) \geq \frac{4}{3} \cdot T_M(1,1)^2$$

Resultados

Teorema

Sea M un matroide de caminos latices sin bucles ni cobucles que no sea una suma directa de serpientes triviales. Entonces

$$T_M(2,0) \cdot T_M(0,2) \geq \frac{4}{3} \cdot T_M(1,1)^2$$

Este teorema resuleve la conjetura de Merino-Welsh para matroides de caminos latices y caracteriza los matroides para los que se da la igualdad.

Esbozo de la demostración

- Probamos el resultado para serpientes conexas

Esbozo de la demostración

- Probamos el resultado para serpientes conexas
- Mostramos que cualquier MCL es una serpiente conexa, o tiene un elemento e tal que tanto $M \setminus e$ como M/e son MCL conexos con menos elementos.

Esbozo de la demostración

- Probamos el resultado para serpientes conexas
- Mostramos que cualquier MCL es una serpiente conexa, o tiene un elemento e tal que tanto $M \setminus e$ como M/e son MCL conexos con menos elementos.
- Enunciamos y mostramos un lema sencillo para probar la desigualdad para M a partir de la desigualdad para $M \setminus e$ y M/e.

Esbozo de la demostración

- Probamos el resultado para serpientes conexas
- Mostramos que cualquier MCL es una serpiente conexa, o tiene un elemento e tal que tanto $M \setminus e$ como M/e son MCL conexos con menos elementos.
- Enunciamos y mostramos un lema sencillo para probar la desigualdad para M a partir de la desigualdad para $M \setminus e$ y M/e.
- Extendemos el resultado para MCL disconexos, pero sin bucles ni cobucles.

Serpientes conexas

- La conjetura sin el $\frac{4}{3}$ se puede probar con el resultado de Noble y Royle de series-parallel graphs.

Serpientes conexas

- La conjetura sin el $\frac{4}{3}$ se puede probar con el resultado de Noble y Royle de series-parallel graphs.
- Procedemos por inducción sobre el número de vueltas de la serpiente. Hacemos 1 y 2 como base.

Serpientes conexas

- La conjetura sin el $\frac{4}{3}$ se puede probar con el resultado de Noble y Royle de series-parallel graphs.
- Procedemos por inducción sobre el número de vueltas de la serpiente. Hacemos 1 y 2 como base.

$$\begin{aligned}
4 \cdot 3 \cdot (2^a - 1) &\geq 12 \cdot \left(1 + a + \frac{a(a-1)}{2} - 1\right) \\
&= 6a^2 + 6a = \frac{4}{3} \cdot (4a^2 + 4a) + \frac{2}{3}(a^2 + a) \\
&\geq \frac{4}{3} \cdot (2a+1)^2.
\end{aligned}$$

Serpientes conexas

- La conjetura sin el $\frac{4}{3}$ se puede probar con el resultado de Noble y Royle de series-parallel graphs.
- Procedemos por inducción sobre el número de vueltas de la serpiente. Hacemos 1 y 2 como base.

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3 \cdot (2^a - 1) &\geq 12 \cdot \left(1 + a + \frac{a(a-1)}{2} - 1\right) \\ &= 6a^2 + 6a = \frac{4}{3} \cdot (4a^2 + 4a) + \frac{2}{3}(a^2 + a) \\ &\geq \frac{4}{3} \cdot (2a+1)^2. \end{aligned}$$

- Hacemos el paso inductivo con una fórmula recursiva para el número de caminos.

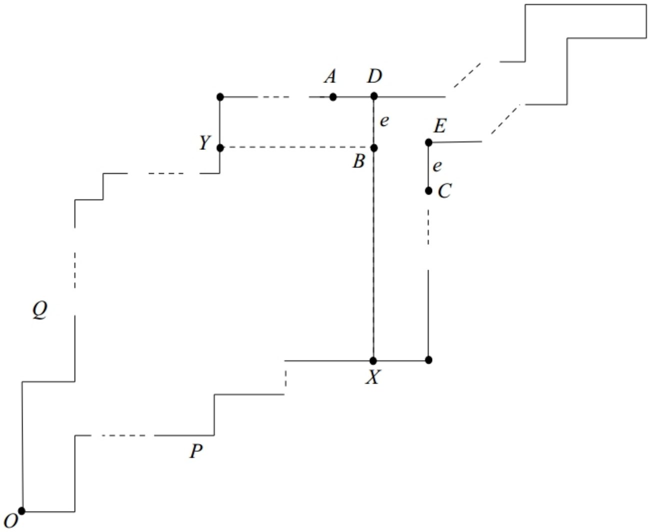
Lema de descomposición

Proposición

Sea M un MCL conexo. Entonces

- *M es una serpiente o*
- *M tiene un elemento e tal que $M \setminus e$ y M/e son MCL conexos distintos de la serpiente trivial.*

Lema de descomposición



Lema de la desigualdad

Lema

Sea M un matroide sin bucles ni cobucles y e un elemento de su conjunto inicial. Supongamos que la desigualdad se cumple para $M \setminus e$ y M/e. Entonces también se cumple para M.

Lema de la desigualdad

Lema

Sea M un matroide sin bucles ni cobucles y e un elemento de su conjunto inicial. Supongamos que la desigualdad se cumple para $M \setminus e$ y M/e. Entonces también se cumple para M.

$$a = T_{M\setminus e}(2,0),\ b = T_{M\setminus e}(0,2),\ c = T_{M\setminus e}(1,1)$$
$$d = T_{M/e}(2,0),\ e = T_{M/e}(0,2),\ f = T_{M/e}(1,1)$$

Lema de la desigualdad

Lema

Sea M un matroide sin bucles ni cobucles y e un elemento de su conjunto inicial. Supongamos que la desigualdad se cumple para $M \setminus e$ y M/e. Entonces también se cumple para M.

$$a = T_{M\setminus e}(2,0),\ b = T_{M\setminus e}(0,2),\ c = T_{M\setminus e}(1,1)$$
$$d = T_{M/e}(2,0),\ e = T_{M/e}(0,2),\ f = T_{M/e}(1,1)$$

$$(a+d)(b+e) \geq \left(\sqrt{ab} + \sqrt{de}\right)^2 \geq \frac{4}{3} \cdot (c+f)^2.$$

Pegar todo y lidiar con conexidad

- De nuevo procedemos por inducción, ahora por el número de elementos en el conjunto inicial.

Pegar todo y lidiar con conexidad

- De nuevo procedemos por inducción, ahora por el número de elementos en el conjunto inicial.
- El lema de descomposición nos permite bajar.

Pegar todo y lidiar con conexidad

- De nuevo procedemos por inducción, ahora por el número de elementos en el conjunto inicial.
- El lema de descomposición nos permite bajar.
- El lema de desigualdad nos permite dar el paso inductivo.

Pegar todo y lidiar con conexidad

- De nuevo procedemos por inducción, ahora por el número de elementos en el conjunto inicial.
- El lema de descomposición nos permite bajar.
- El lema de desigualdad nos permite dar el paso inductivo.
- Para lidiar con disconexos, lo hacemos parte por parte y usamos que el polinomio de Tutte es muliplicativo en sumas directas de matroides.

Pegar todo y lidiar con conexidad

- De nuevo procedemos por inducción, ahora por el número de elementos en el conjunto inicial.
- El lema de descomposición nos permite bajar.
- El lema de desigualdad nos permite dar el paso inductivo.
- Para lidiar con disconexos, lo hacemos parte por parte y usamos que el polinomio de Tutte es muliplicativo en sumas directas de matroides.

$$
\begin{aligned}
T_M(2,0) \cdot T_M(0,2) &= \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i = \prod_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \\
&\geq \frac{4}{3} \cdot \prod_{i=1}^{n} c_i^2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\prod_{i=1} c_i \right)^2 = \frac{4}{3} \cdot T_M(1,1)^2.
\end{aligned}
$$

Corolario: Merino-Welsh para MCL

Teorema

Sea M un matroide de caminos latices sin bucles ni cobucles. Entonces

$$T_M(2,0)\cdot T_M(0,2)\geq T_M(1,1)^2.$$

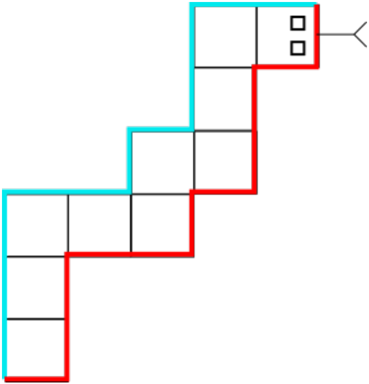
La igualdad se da si y sólo si M es una suma directa de serpientes triviales. En otro caso, podemos mejorar el lado derecho por un factor multiplicativo $\frac{4}{3}$.

Agradecimiento y contacto

¡Gracias por su atención!

Agradecimiento y contacto

¡Gracias por su atención!



http://blog.nekomath.com - leomtz@im.unam.mx