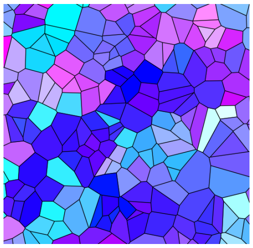

Taller de Geometría
Discreta y Computacional
Encuentro Nacional de
Computación 2021

Politopos métricos y el problema de los máximos diámetros

Gyivan Erick López Campos[1*] y Déborah Oliveros Braniff[2]

[1]Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México
[2]Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México

PLÁTICA

Resumen
En esta plática discutiremos uno de los problemas clásicos planteados por Erőds acerca del máximo número de diámetros en un conjunto de puntos. Así como su relación con otros problemas en geometría discreta. En particular, veremos una versión de este problema para politopos que exploré durante mi tesis de maestría.

Palabras clave: politopo, diámetro, vértices.

1 Introducción

Consideremos el siguiente problema: Sea V el conjunto de $n \geq 2$ vértices de un politopo en un espacio Euclideano de dimensión d. El *diámetro* de V (*diam* (V)) es la máxima distancia entre cualquiera dos vértices de V. Denotamos como $e(V)$ el número de pares $\{x, y\} \subset V$ tal que $\|x - y\|$ =*diam* (V). ¿Cuál es el máximo valor de $e(V)$ y cómo es la configuración de vértices V que lo hacen máximo?

Esta pregunta surge de un problema un poco más general planteado por Erdős, en el cual tomaba un conjunto de puntos cualquiera en $\mathbb{R}^2$ y trataba de encontrar la mayor cantidad de diámetros posibles de este conjunto de puntos. El problema fue resuelto por Hopf y Pannwitz en 1934 [4].

En dimensión 3 Vázsonyi propuso un problema similar, y fue resuelto por separado por Grünbaum [2], Heppes [3] y Straszewicz [7].

Finalmente Swanepoel definió en [8] unas estructuras llamadas configuraciones de Lenz con las cuales dió la solución general del problema de la máxima cantidad de diámetros en un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ las cotas del problema general de puntos coinciden también para vértices de politopos, más aún nos dimos cuenta que los politopos que cumplían la cota eran politopos autoduales, involutivos y algunas de sus diagonales fungían como los diámetros. A este tipo de politopos se les llama *politopos métricos*. Los politopos métricos también se pueden observar en trabajos relacionados con cuerpos de ancho constante como en [6] y resultados de politopos bola.

El problema en $\mathbb{R}^4$ es totalmente diferente, pues probamos que ningún politopo métrico con más de 6 vértices alcanza la cota del problema de los puntos en general, mas aún, para toda $d > 4$ no existe un politopo métrico con un número de vértices suficientemente grande que alcance las cotas establecidas por Swanepoel. Esto mantiene la duda de cuáles son las cotas para el máximo número de diámetros de un conjunto de vértices de un politopo en dimensiones superiores.

Después de la conclusión de mi tesis, la Dra. Déborah Oliveros, el Dr. Tibor Bisztriczky y yo [1] concluimos un árticulo de investigación, mismo que se encuentra en revisión, en el cual establecimos la existencia de politopos métricos en dimensiones mayores que 4 y propusimos una cota para el problema en $\mathbb{R}^4$, restringiendonos únicamente a politopos métricos. Esta cota depende linealmente del número de vértices y aristas del politopo.

***Contacto**
gyivan.lopez@im.unam.mx

Estamos convencidos que esta cota aplica para cualquier politopo y aún puede mejorares. Conjeturamos que el número de diámetros dependerá linealmente del número de vértices del politopo únicamente.

2 Definiciones

Definición 1. $\mathcal{P}^*$ es *politopo dual* de $\mathcal{P}$ si sus latices de caras $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ y $\mathcal{L}(\mathcal{P}^*)$ son anti-isomorfas, esto es que existe un mapeo biyectivo τ con inclusión reversiva de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ a $\mathcal{L}(\mathcal{P}^*)$.

Definición 2. Si $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}^*$, $\mathcal{P}$ se dice que es *auto-dual*.

Definición 3. Un $d-$politopo $\mathcal{P}$ es *involutivo* si existe una función dual τ para $\mathcal{P}$ tal que $\tau^2 = I$, esto es que $\mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}$. **Nota:** No se pide que $\mathcal{P}^{**} \cong \mathcal{P}$, se pide la igualdad. En [5] se muestra un ejemplo.

Definición 4. Sea $\mathcal{P}$ un politopo autodual involutivo en $\mathbb{R}^d$. Una *diagonal principal* de $\mathcal{P}$ es un segmento de linea con extremos en vértices v y w de $\mathcal{P}$ tal que $w \in v^*$.

Definición 5. Sea $\mathcal{P}$ un d-politopo autodual involutivo. $\mathcal{P}$ es *politopo métrico* con distancia h si:

1. Si toda diagonal principal tiene longitud h.
2. $diam(\mathcal{P}) = h$.

3 Problemas

Problema 1. *¿Cuál es el máximo valor de $e(V)$ y cómo es la configuración de vértices V que lo hacen máximo?*

Problema 2. *¿Los politopos métricos en $\mathbb{R}^d$, con $d > 3$ cumplen las cotas de [8]?*

Problema 3. *¿Cúal es la máxima cantidad de diámetros de un politopo métrico en $\mathbb{R}^d$, con $d > 3$?*

4 Resultados

Teorema 1. *Sea $X \subset \mathbb{R}^4$ una Configuración de Lenz [8], con $|X| \geq 6$. Entonces $P = conv(X)$ no es politopo métrico.*

Teorema 2. *Sea $P \subset \mathbb{R}^4$ un politopo métrico en $\mathbb{R}^4$. Entonces $|e(V(\mathcal{P}))| \leq 2f_1(\mathcal{P}) - 2f_0(\mathcal{P})$. Donde $f_i(\mathcal{P})$ es el numéro de caras de dimensión i de $\mathcal{P}$.*

Referencias

[1] T. Bisztriczky, D. Oliveros, and G. López. Configures polytopes and extremal configurations. *ARS Mathematica Contemporanea*, por aparecer.

[2] B. Grümbaum. A proof of vázsonyi's conjecture. *Bull. Res.*, Council Israel Sect. A 6:77–78, 1956.

[3] A. Heppes. Beweis einer vermutung von a. vázsonyi. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, 7:463–466, 1956.

[4] H. Hopf and E. Pannwitz. Aufgabe. *Jahresbericht Deutsch. Math.- Verein*, Nr 167:114, 1934.

[5] S. Jendrol'. A non-involutory selfduality. *Discret. Math.*, 74:325–326, 1989.

[6] L. Montejano and E. Roldán-Pensado. Meissner polyhedra. *Acta Mathematica Hungarica*, 151:482–494, 2017.

[7] S. Straszewicz. Sur un problème géométrique de P. Erdös. *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl.III 5*, pages 39–40, 1957.

[8] Konrad J. Swanepoel. Unit distances and diameters in euclidean spaces. *Discrete & Computational Geometry*, 41:1–27, 2009.