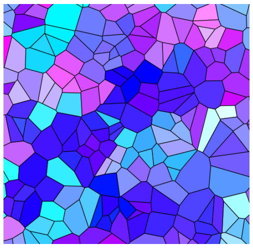

Taller de Geometría Discreta y Computacional
Encuentro Nacional de Computación 2021

Teselando el cuadrado en partes congruentes

Gerardo Lauro Maldonado Martínez[1*] y Edgardo Roldán-Pensado[2]

[1]Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas, UMSNH-UNAM
[2]Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

PLÁTICA

Resumen
Hemos proporcionado una prueba asistida por computadora del siguiente hecho: Si un cuadrado está dividido en siete o nueve polígonos convexos, congruentes entre si, entonces dichos polígonos deben ser rectángulos. Esto confirma un nuevo caso de una conjetura propuesta por Yuen, Zamfirescu y Zamfirescu y después por Rao, Re y Wang. Nuestro método además nos permite explorar otras variantes de la misma conjetura.

Palabras clave: Teselaciones, Congruentes, Equiangulares

1 Introducción

Es fácil ver que un cuadrado puede siempre ser dividido en n rectángulos congruentes poniendo $n-1$ líneas verticales a la misma distancia. Cuando n no es primo hay otras maneras en las que se pueden conseguir dichas particiones sin usar líneas verticales. Aun así, no se sabe si existe un número impar y piezas no rectangulares tales que podamos lograr una partición del cuadrado en piezas congruentes. La conjetura, como se presenta en [3], es la siguiente.

Conjetura 1. *Si n es un entero positivo impar, entonces un cuadrado puede ser teselado por n copias congruentes de un polígono convexo T sí y solo sí T es un rectángulo.*

Para $n = 3$, la conjetura fue propuesta por Rabinowitz en *Crux Mathematicorum* y fue respondida por Maltby [1]. Maltby después generalizo su resultado mostrando que es imposible teselar un rectánuglo con 3 copias de T congruentes a menos que T sea un rectángulo. Para $n = 5$, la conjetura fuera verificada por Yuan *et al.* [5]. Ellos atribuyeron un problema similar a Danzer, quien conjeturo que un cuadrado no puede ser teselado en cinco polígonos congruentes (aún si no fueran convexos). Tal conjetura sigue abierta. Ellos además propusieron la conjetura 1 para n primo.

Existen resultados más generales derivados del trabajo de Thomas y Monsky [4, 2] quienes, independientemente, demostraron que un cuadrado no puede ser teselado por una cantidad impar de triángulos con las misma área. Recientemente Rao *et al.* mostró que T no puede tener más de seis lados y que T no puede ser un trapecio rectángulo [3].

2 Definiciones

Definición 1. Sean P y T polígonos convexos. Decimos que P puede ser teselado en n copias de T si existen polígonos convexos $T_1 \dots, T_n$, todos congruentes a T tal que $P = \bigcup T_i$ y los T_i tienen interiores disjuntos.

Para el análisis combinatorio de dichas particiones consideremos lo siguiente.

Sean $T_1, \dots, T_n$ polígonos convexos que teselan un cuadrado o un rectángulo P cuyos lados los etiquetamos como S_1, S_2, S_3, S_4 en orden cíclico. Construimos la gráfica $G = (V, E)$ donde $V = \{S_1, \dots, S_4, T_1, \dots, T_n\}$ y $\{A, B\} \in E$ si $A, B \in V$ y $A \cap B$ es un segmento de longitud positiva.

La anterior gráfica contiene todas las propiedades combinatorias de la teselación. Es importante notar que G es una gráfica poliédrica, 3−conexa y tiene exactamente $n + 4$ vértices. La figura 1 muestra un ejemplo de una teselación junto a su gráfica asociada.

**Contacto*
gmaldonado@matmor.unam.mx

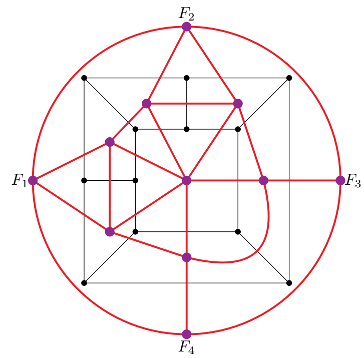

Figura 1. Una teselación (negro) y su gráfica asociada (rojo).

3 Problemas

Dados n y P, lo que nosotros buscamos es saber si es posible teselar con n copias de T a P filtrando las posibles gráficas asociadas a las teselaciones. Para esto utilizamos las propiedades combinatorias ya mencionadas y propiedades geométricas que podemos verificar dependiendo de las opciones que tenemos para T.

Este proceso lo podemos realizar para revisar y enlistar, de haber alguna, todas las teselaciones cuando P no es un cuadrado o cuando pedimos otra condición para las copias de T.

4 Resultados

Implementamos un programa que dados n y P busca todas las gráficas asociadas a teselaciones realizables. Dicho programa nos otorgó la posibilidad obtener demostraciones asistidas de los siguientes resultados.

Teorema 1. *Si $n = 7$ o $n = 9$, entonces un cuadrado no puede ser teselado por n copias de un polígono convexo T a menos que T sea un rectángulo.*

Teorema 2. *Si $n = 5$ o $n = 7$, entonces un rectángulo no puede ser teselado por n copias de un polígono convexo T a menos que T sea un rectángulo.*

Además, haciendo algunas modificaciones del método, fuimos capaces de clasificar todas las teselaciones del cuadrado en 5 polígonos convexos equiangulares.

Teorema 3. *Existen 31 maneras (Un representante por gráfica) en las cuales un cuadrado puede ser teselado por 5 polígonos convexos no rectangulares.*

El código del programa se encuentra en https://github.com/XGEu2X/TilingSquare/.

Referencias

[1] Samuel J. Maltby. Problem 875. *Crux Mathematicorum*, 5(17):141–146, 1991.

[2] Paul Monsky. On dividing a square into triangles. *The American Mathematical Monthly*, 77(2):161–164, 1970.

[3] Hui Rao, Lei Ren, and Yang Wang. Dissecting a square into congruent polygons. *arXiv preprint arXiv:2001.03289*, 2020.

[4] John Thomas. A dissection problem. *Mathematics Magazine*, 41(4):187–190, 1968.

[5] Liping Yuan, Carol T. Zamfirescu, and Tudor I. Zamfirescu. Dissecting the square into five congruent parts. *Discrete Mathematics*, 339(1):288–298, 2016.