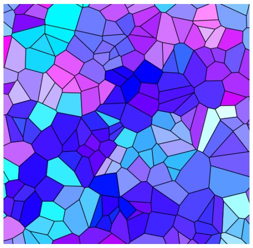

Taller de Geometría
Discreta y Computacional
Encuentro Nacional de
Computación 2021

El teorema del Ham Sandwich

Cuauhtemoc Gomez Navarro[1*] y Isabel Alicia Hubard Escalera[2]

[1,2]Instituto de Matemáticas, UNAM

PLÁTICA

Resumen

El teorema del Ham Sandwich nos dice que, para ciertas medidas finitas, existe un hiperplano que las parte a la mitad simultáneamente. Una generalización es que, para ciertas medidas finitas y para todo entero positivo n, existe una teselación en n conjuntos convexos que miden lo mismo en cada una de las medidas. En esta platica veremos las ideas geométricas y topológicas que se han utilizado para resolver problemas tipo Ham Sandwich, en particular, probaremos los dos resultados anteriores.

Palabras clave: Ham Sandwich, teselaciones convexas, diagramas de potencia, Borsuk-Ulam.

1 Introducción

El teorema del Ham Sandwich en $\mathbb{R}^d$ fue demostrado en 1942 por Stone y Tukey [9].

Teorema 1 (El teorema del Ham Sandwich). *Sean $\mu_1, \dots, \mu_d$ medidas finitas de Borel en $\mathbb{R}^d$, tal que todo hiperplano tiene medida cero para cada μ_i. Entonces, existe un hiperplano h tal que para toda $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ se tiene que $\mu_i(h^+) = \frac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^d) = \mu_i(h^-)$.*

El siguiente teorema es una generalización del teorema del Ham Sandwich; fue demostrado de manera independiente por Soberón [8], Karasev, Hubard, Aronov [6] y Blagojevic, Ziegler [3].

Teorema 2. *Sean n y d enteros positivos. Sean $\mu_1, \dots, \mu_d$ medidas amigables en $\mathbb{R}^d$ tal que $\mu_i(\mathbb{R}^d) = n$ para toda i. Entonces, existe una teselación convexa de $\mathbb{R}^d$ en n conjuntos $C_1, C_2, \dots, C_n$ tal que $\mu_i(C_j) = 1$ para toda i, j.*

Observemos que cuando n es una potencia de 2 se puede demostrar el teorema 2 usando el teorema del Ham Sandwich de manera inductiva, sin embargo, demostrarlo para todos los enteros positivos n fue un problema que tardó más de 10 años en resolverse. Ito, Uehara, Yokoyama [5] (en 1998) y Bespamyatnikh, Kirkpatrick, Snoeyink [2] (en 2000) probaron de manera independiente el caso discreto en $\mathbb{R}^2$, y Sakai [7] (en 2002) lo probó para medidas en $\mathbb{R}^2$. En 2010 Hubard y Aronov [4] usaron *diagramas de potencia* (que son una generalización de los *diagramas de Voronoi*) para reducir un problema de repartición equitativa (al que llamaron el *teorema del pollo picante*) a un problema topológico. Después, en 2012 Soberón [8] usa las ideas de Hubard y Aronov [4] y el teorema de Dold para demostrar un lema sobre *particiones balanceadas* y el teorema 2. Por otro lado, en 2014 Karasev, Hubard y Aronov [6] demuestran el teorema del pollo picante para números de la forma p^k (con p primo) y como corolario obtienen el teorema 2. También, en 2014 Blagojevic y Ziegler [3] usaron la solución geométrica de Karasev, Hubard y Aronov [6] y teoría de obstrucción para demostrar el teorema del pollo picante para números de la forma p^k, con lo cual se tiene otra demostración del teorema 2.

2 Definiciones

Definición 1. Diremos que una acción de un grupo G sobre un conjunto X es *libre*, si no hay $g \in G \setminus \{e\}$ que tenga puntos fijos; es decir, para cada $g \neq e$ y $x \in X$, $g(x) \neq x$. Si $(X, \Phi), (Y, \Psi)$ son G espacios, una función continua $f : X \to Y$ es *G equivariante* si $f\varphi_g = \psi_g f$ para toda $g \in G$.

**Contacto*
cgn@ciencias.unam.mx

Definición 2. Sea $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de n puntos en $\mathbb{R}^d$ y $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ un vector de pesos en $\mathbb{R}^n$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos las *funciones potencias* $h_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ como $h_i(x) = d(x, x_i)^2 - w_i$. El *diagrama de potencia* $C(S, w)$ es una teselación de $\mathbb{R}^d$ en n conjuntos $C_1, \ldots, C_n$, tal que, $x \in C_i \Leftrightarrow h_i(x) \leq h_j(x)$ para toda j.

Definición 3. Una medida μ en $\mathbb{R}^d$ es *amigable*, si es finita, absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, y existe un conjunto convexo y compacto K tal que $\mu(K) = \mu(\mathbb{R}^d)$.

3 Problemas

Problema 1. *Dadas d medidas finitas en $\mathbb{R}^d$, ¿cuándo podemos asegurar que existe una teselación de $\mathbb{R}^d$ en n conjuntos convexos tal que los convexos miden lo mismo en cada una de las d medidas?*

4 Resultados

Teorema 3 (El teorema del Ham Sandwich). *Sean $\mu_1, \ldots, \mu_d$ medidas finitas de Borel en $\mathbb{R}^d$, tal que todo hiperplano tiene medida cero para cada μ_i. Entonces, existe un hiperplano h tal que para toda $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ se tiene que $\mu_i(h^+) = \frac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^d) = \mu_i(h^-)$.*

Teorema 4 ([1]). *Sea $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de n puntos en $\mathbb{R}^d$ y sea K un conjunto convexo y compacto. Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^d$ la cual es cero afuera de K y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Para cada función de capacidad $c : S \to [0, 1]$ con $\sum_{x_i \in S} c(x_i) = 1$, existe un vector de pesos $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que el diagrama de potencia $C(S, w)$ cumple que $\mu(C_i) = c(x_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Lema 1. *[[8]] Sean p y d enteros positivos con p un número primo. Sean $\mu_1, \ldots, \mu_d$ medidas amigables en $\mathbb{R}^d$ tal que $\mu_i(\mathbb{R}^d) = p$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Entonces, existe un entero $2 \leq r \leq p$ y una teselación de $\mathbb{R}^d$ en r conjuntos convexos $C_1, C_2, \ldots, C_r$, tal que $\mu_1(C_j) = \mu_2(C_j) = \ldots = \mu_d(C_j)$, para toda $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, y estas medidas son todas enteras positivas.*

Teorema 5 ([8]). *Sean n y d enteros positivos. Sean $\mu_1, \ldots, \mu_d$ medidas amigables en $\mathbb{R}^d$ tal que $\mu_i(\mathbb{R}^d) = n$ para toda i. Entonces, existe una teselación convexa de $\mathbb{R}^d$ en n conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tal que $\mu_i(C_j) = 1$ para toda i, j.*

Referencias

[1] B. Aronov, F. Aurenhammer, and F. Hoffmann. Minkowski-type theorems and least-squares clustering. *Algoritmica 20*, pages 61–76, 1998.

[2] S. Bespamyatnikh, D. Kirkpatrick, and J. Snoeyink. Generalizing ham sandwich cuts to equitable subdivisions. *Discrete Comput. Geom.*, pages 605–622, 2000.

[3] P.V.M Blagojevic and G.M. Ziegler. Convex equipartitions via equivariant obstruction theory. *Israel Journal of Mathematics*, pages 49–77, 2014.

[4] A. Hubard and B. Aronov. Convex equpartition of volume and surface area. *arXiv:1010.4611v1 [math.MG]*, 2010.

[5] H. Ito, H. Uehara, and M. Yokoyama. 2-dimension ham sandwich theorem for partitioning into three convex pieces. *In Discrete and Computational Geometry: Japanese Conference*, 1998.

[6] R. Karasev, A. Hubard, and B. Aronov. Convex equipartitions: The spicy chicken theorem. *Geometriae Dedicata*, pages 263–279, 2014.

[7] T. Sakai. Balanced convex partitions of measures in $\mathbb{R}^2$. *Graphs and Combinatorics*, pages 169–192, 2002.

[8] P. Soberon. Balanced convex partitions of measures in $\mathbb{R}^d$. *Mathematika*, pages 71–76, 2012.

[9] A.H. Stone and J.W. Tukey. Generalized sandwich theorems. *Duke Math*, 1942.