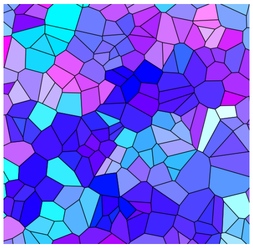

Taller de Geometría
Discreta y Computacional
Encuentro Nacional de
Computación 2021

Un viaje hamiltoniano a través de las teselaciones regulares del plano hiperbólico

Claudia Silva Ruiz[1*] y Christian Rubio Montiel[2]

[1]Facultad de Ciencias, UNAM
[2]FES Acatlán, UNAM

REPORTE DE TESIS

Resumen

Este trabajo trata de determinar si cierta familia de gráficas infinitas, gráficas asociadas a mapas de teselaciones regulares del plano hiperbólico, son hamiltonianas o no. Extender el concepto a gráficas infinitas no es sencillo, y de hecho hay varias maneras de hacer esto. Aquí abordamos la extensión dada en [2], llamándole curva hamiltoniana.

Palabras clave: Hamiltonicidad, Mapas hiperbólicos, Teselaciones regulares

1 Introducción

Antes de pasar al estudio de la hamiltonicidad en geometrías no euclidianas como lo es la geometría hiperbólica, se analizan antecedentes del estudio de hamiltonicidad en superficies. Se sabe que los mapas regulares en el toro son de tipo $\{3,6\}$, $\{4,4\}$ y $\{6,3\}$, los mismos tipos del plano y la botella de Klein. Para el toro, se tiene que ***todos los mapas regulares del toro son hamiltonianos*** [1], [4]. Por otro lado, ***todas las gráficas cúbicas con caras hexagonales de la botella de Klein son hamiltonianas*** [5].

Las teselaciones regulares del plano hiperbólico se clasifican en tres tipos ([3]): compactas, paracompactas y no compactas. El estudio contempla cada caso por separado.

2 Definiciones

Definición 1. Ciclo, ciclo hamiltoniano y gráfica hamiltoniana: Un *ciclo* de una gráfica es un camino cerrado que no repite vértices. Un ciclo es ***hamiltoniano*** si contiene a todos los vértices de la gráfica, una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano se llama ***gráfica hamiltoniana***.

Para pasar a las gráficas infinitas como es el caso de las teselaciones regulares hiperbólicas, se tomará en cuenta esta forma de compactificar una gráfica.

Definición 2. End: Es una clase de equivalencia de rayos equivalentes que se pueden pensar como un mismo "punto al infinito".

Definición 3. Compactificación de G: A una gráfica encajable G junto con sus ends se le llama la compactificación Freudenthal de G y se denota por $|G|$.

Definición 4. Curva de $|G|$, $X-$curva y curva hamiltoniana: Una *curva* (cerrada) de $|G|$ es la imagen de un mapeo continuo del círculo unitario S^1 a $|G|$. Para un conjunto de vértices X, una $X-$*curva* es una curva cerrada en $|G|$ tal que cada vértice de X es usado exactamente una vez. Una $V(G)$-curva, llamada ***curva hamiltoniana***, pasa por cada vértice exactamente una vez, pero puede pasar por un end arbitrariamente seguido.

***Contacto**
callame@ciencias.unam.mx

3 Problemas

Problema 1. *¿Los mapas asociados a las teselaciones regulares del plano hiperbólico son hamiltonianos?*

4 Resultados

Para responder la pregunta de si las teselaciones regulares del plano hiperbólico son hamiltonianas o no, se ocuparán los siguientes teoremas:

Teorema 1 [2] : Para una gráfica G localmente finita son equivalentes:

i) Para todo subconjunto finito S de vértices, G tiene un ciclo que contiene a S.

ii) Para todo subconjunto finito S de vértices, existe una S-curva en $|G|$.

iii) $|G|$ tiene una curva hamiltoniana.

Teorema 2 [2] : Toda gráfica plana localmente finita 4-conexa tiene una curva hamiltoniana.

Todas las teselaciones regulares compactas del plano hiperbólico son localmente finitas, por lo que se pueden ocupar ambos teoremas. Las compactas con reguaridad mayor o igual a 4, son 4-conexas, de modo que son hamiltonianas por el teorema 2. Para las teselaciones regulares compactas 3-regulares, resultan hamiltonianas también, empleando el teorema 1, en específico, i) $\Rightarrow$ iii), construyendo ciclos como el que se aprecia en las siguiente imagen.

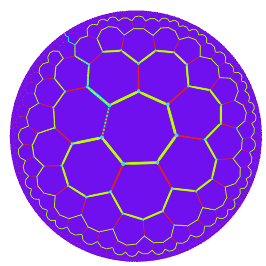

Figura 1. Ciclo C_4 de $\{7, 3\}$.

Se puede resumir esta sección con el resultado obtenido:

Resultado principal : Todas las teselaciones regulares hiperbólicas compactas son hamiltonianas, mientras que las teselaciones hiperbólicas paracompactas y las no compactas, no lo son.

Estos resultados se dan sin perder en cuenta que se consideró una extensión particular para gráficas infinitas de ciclos hamiltonianos, donde el encaje de la gráfica y su compactificación son determinantes.

Referencias

[1] Amos Altshuler. Hamiltonian circuits in some maps on the torus. *Discrete Mathematics*, 1(4):299–314, 1972.

[2] André Kündgen, Binlong Li, and Carsten Thomassen. Cycles through all finite vertex sets in infinite graphs. *European J. Combin.*, 65:259–275, 2017.

[3] Wikipedia contributors. Uniform tilings in hyperbolic plane — Wikipedia, the free encyclopedia, 2019.

[4] Xiaofan Yang, David J. Evans, Hongjian Lai, and Graham M. Megson. Generalized honeycomb torus is Hamiltonian. *Inform. Process. Lett.*, 92(1):31–37, 2004.

[5] Dong Ye. Hamilton cycles in cubic polyhex graphs on the Klein bottle. *Ars Combin.*, 112:205–212, 2013.