Familias de intersección de 2-trayectorias

Dolores Lara[1] y Christian Rubio-Montiel[2*]

[1]Departamento de Computación, CINVESTAV
[2]División de Matemáticas e Ingeniería, FES-Acatlan, UNAM

Taller de Geometría Discreta y Computacional Encuentro Nacional de Computación 2021

PROBLEMA ABIERTO

Abstract
Dados n puntos en posición general, se define una familia de intersección de 2-trayectorias como una colección de trayectorias de longitud 2 (con vértices en la colección de puntos dados) tal que dos a dos no comparten aristas y tienen intersección no vacía (se cruzan o bien comparten un punto). Se ha demostrado que hay al menos $\frac{n^{3/2}}{12\sqrt{6}}$ elementos en una familia de intersección maximal de 2-trayectorias [Lara,R-M,Acta Math Hungar 157 (2019)2, 301–311]. Se tienen dos conjeturas:

(Conjetura débil) Existen familias de intersección de 2-trayectorias con $\omega(n^{3/2})$ elementos.

(Conjetura fuerte) Existen familias de intersección de 2-trayectorias con $\theta(n^2)$ elementos.

Palabras clave: Crossing families, Intersecting families.

1 Introducción

Una gráfica geométrica $G = (V, E)$ es una pareja ordenada de conjuntos finitos tales que V es un conjunto de puntos en posición general en el plano (no hay tres colineales) y E son segmentos rectilíneos que unen dos puntos de V(aristas). Una gráfica geométrica se puede definir como un encaje rectilíneo en el plano de una gráfica. Un conjunto de puntos en posición general, induce de manera natural una gráfica completa geométrica. Para fines prácticos, asumiremos que G es una gráfica completa.

Sean G_1 y G_2 dos subgráficas geométricas de G no vacías y disjuntas en aristas. Decimos que G_1 y G_2 se cruzan si una arista de G_1 y una arista de G_2 tienen exactamente un punto interior común.

Dada una gráfica H, una familia de subgráficas geométricas tal que cada una es un dibujo rectilíneo de H, cada dos de estas gráficas *no comparten vértices*, y son subgráficas geométricas de una gráfica geométrica G, decimos que es una H-crossing family si cada par de ellas se cruzan.

El problema de las K_2-crossing families (o simplemente crossing families) surge en [2] donde se demuestra que existen K_2-crossing families de $\sqrt{n/12}$ elementos y conjeturando que su cota se puede mejorar. Más tarde, en [1] se conjetura que siempre se pueden hallar K_2-crossing families de orden lineal.

El problema de las crossing families se ha extendido a más dimensiones o cambiando la gráfica H a otras trayectorias (P_3 o P_4) [1], estrellas [4], apareamientos [3, 5], etc.

2 Problema

Dada una gráfica H, una familia de subgráficas geométricas tal que cada una es un dibujo rectilíneo de H, cada dos de estas gráficas *no comparten aristas* y son subgráficas geométricas de una gráfica geométrica de G, decimos que es una H-intersecting family si cada par de ellas se cruzan o comparten un vértice. Una K_2-intersecting family también se conoce como thrackle.

En [4] se demostró que hay P_3-intersecting families de $\frac{n^{3/2}}{12\sqrt{6}}$ elementos y proponemos dos conjeturas:

***Contacto**
christian.rubio@acatlan.unam.mx

(Conjetura débil) Existen familias de intersección de 2-trayectorias con $\omega(n^{3/2})$ elementos.

(Conjetura fuerte) Existen familias de intersección de 2-trayectorias con $\theta(n^2)$ elementos.

Una solución algorítmica también es de interés, es decir las siguientes cuestiones naturales:

1. Dar un algoritmo eficiente que reciba como entrada un conjunto S de puntos en el plano y que devuelva como salida la P_2-intersecting family de mayor cantidad de elementos.

2. Si se demuestra la conjetura (débil o fuerte), ¿existe un algoritmo eficiente que construya la P_2-intersecting family del tamaño propuesto por la conjetura?

References

[1] J. L. Álvarez, J. Cravioto, and J. Urrutia. Crossing families and self crossing hamiltonian cycles. *In Abstracts of the XVI Spanish Meeting on Computational Geometry, Barcelona, July 1–3*, pages 13–16, 2015.

[2] B. Aronov, P. Erdős, W. Goddard, D. J. Kleitman, M. Klugerman, J. Pach, and L. J. Schulman. Crossing families. *Combinatorica*, 14(2):127–134, 1994.

[3] I. Bárány and P. Valtr. A positive fraction Erdős-Szekeres theorem. volume 19, pages 335–342. 1998. Dedicated to the memory of Paul Erdős.

[4] D. Lara and C. Rubio-Montiel. On crossing families of complete geometric graphs. *Acta Math. Hungar.*, 157(2):301–311, 2019.

[5] Mark J. Nielsen and Dusty E. Sabo. Transverse families of matchings in the plane. *Ars Combin.*, 55:193–199, 2000.