

Taller de Geometría
Discreta y Computacional
Encuentro Nacional de
Computación 2021

El Diagrama de Voronoi de Rayos Giratorios y sus aplicaciones en iluminación con reflectores

Carlos Alegría^{1*}, Ioannis Mantas², Evanthia Papadopoulou², Marko Savić³,
Hendrik Schrezenmaier⁴, Carlos Seara⁵, y Martin Suderland²

¹Dipartimento di Ingegneria, Università Roma Tre, Italy.

²Faculty of Informatics, Università della Svizzera italiana, Switzerland

³Department of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad, Serbia

⁴Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, Germany

⁵Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya, Spain.

PLÁTICA

Resumen

En esta plática presentamos el *Diagrama de Voronoi de Rayos Giratorios*, una estructura de Voronoi definida por un conjunto de rayos en el plano, y una función de distancia inspirada en problemas de iluminación con reflectores.

Mostramos cómo construir eficientemente el diagrama en todo el plano, o restringido a una región acotada por un polígono convexo. Además, aprovechamos esta última restricción para calcular el *Ángulo de Brocard* de un polígono convexo en tiempo lineal.

Palabras clave: Diagrama de Voronoi, Iluminación con reflectores, Ángulo de Brocard

1 Introducción

Sean r_1 y r_2 dos rayos que parten de un punto $x \in \mathbb{R}^2$ tales que, después de rotar r_1 alrededor de x en sentido antihorario por un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$, obtenemos r_2 . La poligonal $r_1 \cup r_2$ divide el plano en dos regiones que llamamos *reflectores*. Decimos que ambos reflectores tienen *ápice* x y *apertura* α y $2\pi - \alpha$, respectivamente. Un α -reflector es un reflector con apertura α ; ver Figura 1a.

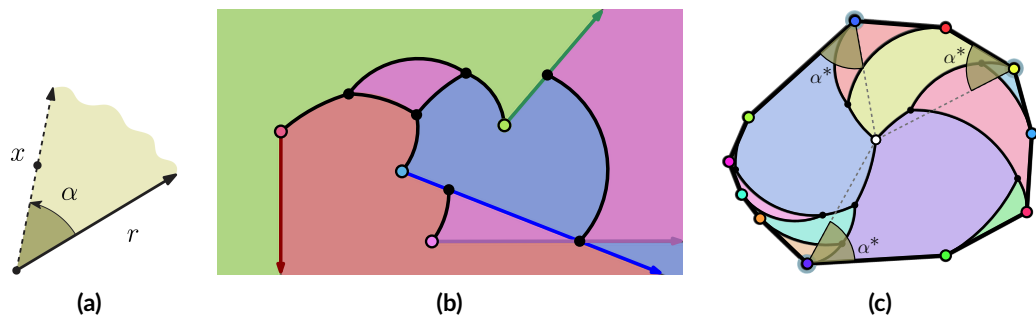


Figura 1. (a) La distancia entre el punto x y el rayo r es el ángulo α . La región coloreada es un α -reflector. (b) El diagrama de 4 rayos en el plano. (c) El diagrama restringido a un polígono convexo P . El vértice blanco del diagrama realiza el Ángulo de Brocard α^* de P . El vértice es simultáneamente iluminado por tres α^* -reflectores, los cuales iluminan también el interior P .

Dado un conjunto de α -reflectores y una región en el plano, un problema clásico de iluminación es el de calcular el valor mínimo de α para el cual los α -reflectores cubren (iluminan) la región completamente. Inspirados en este tipo de problemas, definimos el *Diagrama de Voronoi de Rayos Giratorios*. Los sitios de este diagrama son rayos en el plano. La distancia de un punto $x \in \mathbb{R}^2$ hacia un rayo r es el ángulo α tal que, si rotamos r alrededor de su ápice en sentido antihorario

**ACCESO
ABIERTO**

*Contacto
carlos.alegria@uniroma3.it

por α , entonces r pasa por x . Decimos que este ángulo es la *distancia angular* de x hacia r . Ver nuevamente la Figura 1a.

El diagrama de Voronoi de un conjunto de cuatro rayos se muestra en la Figura 1b. Supongamos que a cada rayo r le asociamos un α -reflector f , de forma que f es igual a r cuando $\alpha = 0$. El diagrama divide el plano en regiones tales que, los puntos en cada región son iluminados primero (tienen distancia angular más pequeña) por el rayo del mismo color.

Al restringir el diagrama a una región \mathcal{R} , la estructura de Voronoi de Rayos Giratorios revela el ángulo mínimo α^* requerido para iluminar \mathcal{R} . Cuando la región es un polígono convexo P , el ángulo α^* es conocido como el Ángulo de Brocard de P ; ver Figura 1c. El ángulo de Brocard de un polígono convexo fue estudiado recientemente en [1], como una generalización a polígonos arbitrarios del ángulo de Brocard de un triángulo [2, 3].

2 Definiciones

Denotemos con $d_{\angle}(x, r)$ a la distancia angular de un punto $x \in \mathbb{R}^2$ hacia un rayo r . Sea S un conjunto de n rayos en el plano. Dados dos rayos $r, s \in S$, la *región de dominación* de r sobre s , que denotamos con $dr(r, s)$, es el conjunto de puntos en el plano con menor distancia angular hacia r que hacia s . El Diagrama de Voronoi de Rayos Giratorios de S es la subdivisión del plano en *regiones de Voronoi* que se definen como sigue:

$$vreg(r) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall s \in S \setminus \{r\} : d_{\angle}(x, r) < d_{\angle}(x, s)\}.$$

Definimos a la gráfica inducida por este diagrama como $RVD(S) := (\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{r \in S} vreg(r)) \cup S$.

3 Problemas

Estudiamos los siguientes problemas.

Problema 1 (RVD en el plano). *Dado un conjunto S de n de rayos en el plano con orientación arbitraria, calcular $RVD(S)$.*

Problema 2 (RVD en un polígono convexo). *Sea P un polígono convexo con vértices v_0, \dots, v_{n-1} , y S un conjunto $\{r_0, \dots, r_{n-1}\}$ de rayos tales que, el rayo r_i parte de v_i y pasa por v_j , donde $j = (i + 1) \bmod(n)$. Calcular $RVD(S)$ restringido a la región acotada por P .*

4 Resultados

Demostramos los siguientes resultados.

Teorema 1. *Existe un algoritmo que, para cualquier $\varepsilon > 0$, resuelve el Problema 1 en tiempo $O(n^{2+\varepsilon})$ y espacio $O(n^{2+\varepsilon})$.*

Teorema 2. *Existe un algoritmo que resuelve el Problema 2 en $\Theta(n)$ tiempo y $\Theta(n)$ espacio.*

Como consecuencia del Teorema 2 obtenemos el siguiente resultado, que mejora la complejidad presentada en [1].

Corolario 1. *El Ángulo de Brocard de un polígono convexo se puede calcular en tiempo $\Theta(n)$ y espacio $\Theta(n)$.*

Referencias

- [1] Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara, and Jorge Urrutia. Illuminating polygons by edge-aligned floodlights of uniform angle (Brocard illumination). In *Proc. European Workshop on Computational Geometry*, pages 281–284, 2017.
- [2] Arthur Bernhart. Polygons of pursuit. *Scripta Mathematica*, 24(1):23–50, 1959.
- [3] Laura Guggenbuhl. Henri Brocard and the geometry of the triangle. *The Mathematical Gazette*, 37(322):241–243, 1953.