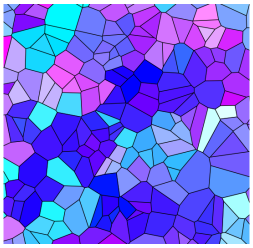

Taller de Geometría
Discreta y Computacional
Encuentro Nacional de
Computación 2021

De nervios, palabras y gráficas.

Antonio Torres Hernández[1*] y Déborah Oliveros Braniff[2]

[1]Instituto de Matemáticas UNAM
[2]Instituto de Matemáticas UNAM

PLÁTICA

Resumen
En esta charla hablaremos de los *nervios de particiones de puntos*. Estos son los complejos simpliciales provenientes de las intersecciones de envolventes convexas de particiones en conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^d$. En particular, hablaremos de algunas generalizaciones del famoso Teorema de Tverberg. Buscaremos familias de nervios “inevitables", es decir complejos simpliciales tales que para cualquier conjunto de puntos suficientemente grande, siempre existe una partición que los induce. Daremos también un nuevo enfoque combinatorio relacionado conjuntos de puntos con palabras. Finalmente expondremos nuevos resultados referentes a las gráficas circulares y bipartitas.

Palabras clave: Nervios, Tverberg, Palabras

1 Introducción

Los nervios (patrones de intersección) de familias de convexos han sido ampliamente estudiados en las áreas de combinatoria, álgebra, topología y geometría entre otras (ver [2] para más información) y se definen de la siguiente manera .

Definición 1. Dada una familia $F = \{F_1, ..., F_m\}$ de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^d$. El nervio $\mathcal{N}(F)$ de F es el complejo simplicial con vértices en $[m] := \{1, 2, ..., m\}$ cuyas facetas son $I \subset [m]$ tales que $\cap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$

En [1] los autores dan las siguiente definiciones.

Definición 2. Dada una colección de puntos $S \subset \mathbb{R}^d$ y una n-partición en n clases cromáticas $P = S_1, ..., S_n$ de S, el nervio de la partición, $\mathcal{N}(P)$ es el nervio $\mathcal{N}(\{conv(S_1), ..., conv(S_n)\})$

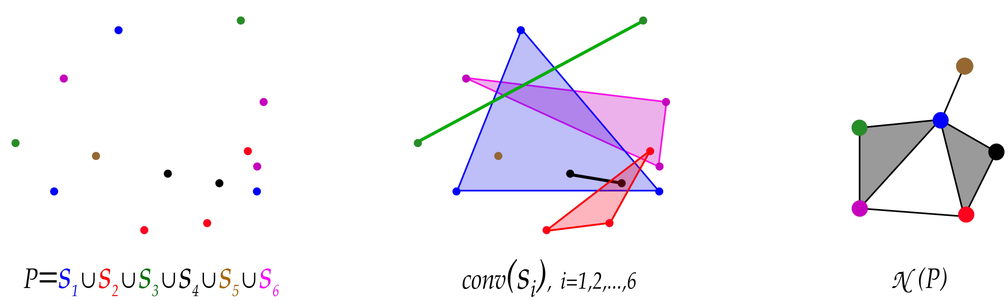

Figura 1

Definición 3. Un complejo simplicial $\mathcal{K}$ es d-Tverberg si existe una constante $Tv(\mathcal{K}, d)$ tal que $\mathcal{K}$ es inducido como nervio por alguna partición en cualquier conjunto de puntos $S \subset \mathbb{R}^d$ en posición general con $|S| > Tv(\mathcal{K}, d)$".

En esta filosofía el famoso Teorema de Tverberg [3] se vuelve el caso particular cuando el complejo $\mathcal{K}$ es un $(d-1)$-simplejo y puede reformularse de la siguiente manera.

Teorema 1 (Teorema de Tverberg refraseado). *El $(m-1)$-simplejo es d-Tverberg para todo $d \geq 1$, con número de Tverberg $(d+1)(m-1)+1$.*

**Contacto*
corr.author@xyz.ac.mm

Surgen entonces preguntas naturales como ¿qué otros complejos simpliciales también son d-Tverberg? ¿cuales son los valores exactos o aproximados para d y $Tv(\mathcal{K}, d)$? y ¿existe un complejo simplicial que no sea de Tverberg para ninguna d? entre otras.

2 Los problemas

Siguiendo esta linea de pensamiento enfocamos nuestros esfuerzos en responder los siguientes problemas.

Problema 1. *La caracterización de los complejos simpliciales* 2*-Tverberg o al menos encontrar familias que lo sean.*

Problema 2. *Probar que las gráficas bipartitas son* d*-Tverberg para alguna* d *y acotar su número de Tverberg.*

Problema 3. *¿Hay algún complejo que no sea* d*-Tverberg para ninguna* d*?*

3 Resultados

Para intentar resolver estas preguntas utilizamos un nuevo enfoque relacionando configuraciones de puntos con palabras finitas, volviendo un problema geométrico algo meramente de combinatoria computacional. De esta manera obtuvimos los siguientes resultados.

Teorema 2. *Toda gráfica circular es* 2*-Tverberg.*

Corolario 1. *Toda gráfica planar exterior es* 2*-Tverberg.*

Teorema 3. *Para toda gráfica* G *libre de triángulos existen enteros* d *y* n *tales que todo conjunto* S *con* n *puntos en la curva momento* $M_d = \{x(t) = (t, t^2, \dots, t^d) : t \in \mathbb{R}^d\}$ *existe una partición que induce a* G *como nervio.*

Teorema 4. *Toda gráfica bipartita* $G = (V = A \sqcup B, E)$ *es* d*-Tverberg para toda* $d \geq 2m$ *donde* $m = min\{|A|, |B|\}$.

Referencias

[1] Jesús Loera, Thomas Hogan, Deborah Oliveros, and Dominic Yang. Tverberg-type theorems with trees and cycles as (nerve) intersection patterns. 08 2018.

[2] Martin Tancer. Intersection patterns of convex sets via simplicial complexes: a survey. In *Thirty essays on geometric graph theory*, pages 521–540. Springer, 2013.

[3] Helge Tverberg. A generalization of radon's theorem. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1):123–128, 1966.