Taller de Geometría
Discreta y Computacional
Encuentro Nacional de
Computación 2021

Cuadriláteros arcoíris de área mínima y máxima

A. Arévalo[1], R. Chávez-Jiménez[2], A. Hernández-Mora[3], R. López-López[4], N. Marín[5], A. Ramírez-Vigueras[6*], y J. Urrutia[7]

[1, 2, 3, 4, 5]Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación, UNAM.
[6, 7]Instituto de Matemáticas, UNAM.

PLÁTICA

Abstract
Un polígono heterocoromático o arcoíris es un polígono tal que todos sus vértices tienen distinto color. En esta plática, mostraremos un algoritmo de tiempo $O(kn^2)$ para encontrar el cuadrilátero heterocromático de área minima y máxima en un conjunto de puntos en el plano k-coloreado de n vértices, con $k \leq n$. Además, presentaremos un algoritmo de tiempo cuadrático para determinar si un conjunto de puntos en el plano 4-coloreado con n vértices contiene un cuadrilátero heterocromático convexo.

Palabras clave: Cuadrilátero, Heterocromático, Convexo

1 Introducción

En 1935 Erdös-Szekeres en [5] consideraron un problema sobre la existencia de un número $g(m)$ tal que cualquier conjunto S de $g(m)$ puntos en el plano en posición general contiene un m-ágono convexo. Dicho problema resultó ser muy desafiante, por lo que atrajo la atención de muchos investigadores; por ende, existe toda una familia de problemas basados en este problema, por ejemplo, los m-ágonos a buscar no son necesariamente convexos o pueden ser vacíos o no, inclusive se inició el estudio de variantes coloreadas, es decir, cada punto de S tiene asignado un color. Para una buena historia de este tipo de problemas consultar [2].

Los problemas de optimización geométrica también tuvieron lugar en esta amplia familia de problemas, Boyce, Dobkin, Drysdale y Guibas en [3] estudiaron los problemas de encontrar el m-ágono convexo de perímetro y área máxima en un conjunto de puntos S; sus algoritmos usan espacio lineal y $O(mn \log n + n \log^2 n)$ tiempo, pero tiempo después fueron mejorados por Aggarwal, Klawe, Moran, Shor, and Wilber a $O(mn + n \log n)$ [1].

Por otra parte, los problemas extremales de minimización tienen un role importante en el reconocimiento de patrones, por lo que encontrar los m-áganos convexos de área mínima fueron estudiados por Eppstein, Overmars, Rote y Woeginger obteniendo un algoritmo de $O(mn^3)$ para obtenerlo [4].

Pero, qué pasa con el problema de encontrar los m-ágonos de área mínima y máxima en conjuntos de puntos k-coloreados de manera que sus vértices sean de distinto color. En está plática nos centraremos en mostrar un algoritmo para obtener un 4-ágono heterocromático o cuadrilátero heterocromático de área mínima y máxima.

2 Problemas

Los problemas a tratar son los siguientes:

Problema 1. *Sea S un conjunto de puntos en el plano k-coloreado de n vértices y en posición general. ¿Es posible encontrar un cuadrilátero heterocromátco de área mínima (máxima) cuyos vértices son puntos de S?.*

Problema 2. *Sea S un conjunto de puntos en el plano 4-coloreado de n vértices y en posición general. ¿Podemos decidir si S contiene un cuadrilatero convexo heterocromático?.*

ACCESO ABIERTO

**Contacto*
adriana.rv@im.unam.mx

3 Resultados

Teorema 1. *Sea S un conjunto de puntos en el plano k-coloreado de n vértices y en posición general. Un cuadrilátero heterocromático de área mínima (máxima) cuyos vértices son puntos de S puede ser encontrado en $O(kn^2)$ tiempo y $O(n^2)$ espacio.*

Teorema 2. *Sea S un conjunto de puntos en el plano 4-coloreado de n vértices y en posición general. Decidir si existe un cuadrilátero convexo heterocomático en S se resuelve en $O(n^2)$ tiempo y espacio.*

References

[1] A. Aggarwal, M. Klawe, S. Moran, P. Shor, and R. Wilber. Geometric applications of a matrix-searching algorithm. *Algorithmica*, 2:195–208, 01 1987.

[2] O. Aichholzer. [empty] [colored] k-gons-recent results on some erdős-szekeres type problems. 2009.

[3] J. Boyce, D. Dobkin, R. Drysdale, and L. Guibas. Finding extremal polygons. *SIAM J. Comput.*, 14:134–147, 02 1985.

[4] David Eppstein, Mark Overmars, Günter Rote, and Gerhard Woeginger. Finding minimum area k-gons. *Discrete Computational Geometry*, 7:45–58, 1992.

[5] P. Erdös and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica*, 2:463–470, 1935.